研究生教材

# 数理方程HILBERT空间方法
## （上）
# 广义函数和СОБОЛЕВ空间

李开泰　马逸尘

西安交通大学出版社

0177
L27
1

368264

研究生教材

# 数理方程HILBERT空间方法

（上）

# 广义函数和СОБОЛЕВ空间

李开泰　马逸尘

西安交通大学出版社

哈尔滨船舶工程学院
中文藏书
图书馆

## 内 容 简 介

本书是数理方程Hilbert空间方法的上册，其内容为广义函数和Соболев空间两部分。

广义函数包括三类广义函数的定义、性质、结构和相互关系；广义函数的卷积和Fourier变换等。Соболев空间主要讨论整数阶Соболев空间、实数阶Соболев空间、迹空间，以及在电磁场、连续介质力学中很有用的向量值Соболев空间。

本书内容丰富，结构紧凑。可作为高等院校计算数学、应用数学、计算物理以及计算力学等专业研究生教材，也可作为有关专业的高年级大学生、研究生、大学教师和科技工作者教学和科研参考书。


**数理方程 HILBERT 空间方法**

**（上）**

**广义函数和СОБОЛЕВ空间**

李开泰 马逸尘

*

西安交通大学出版社出版

（西安市咸宁路28号）

西安交通大学出版社轻版印刷厂印装

陕西省新华书店经售

*

开本850×1168 1/32 印张8.375 字数205千字

1990年10月第1版 1990年10月第1次印刷

印数：1—2,000

ISBN7-5606-0418-3/O·72 定价：3.50元

# 《研究生教材》总序

研究生教育是我国高等教育的最高层次，是为国家培养高层次的人才。他们必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，以及从事科学研究工作或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是研究生培养中的重要环节。为此，我们组织出版这套《研究生教材》，以满足当前研究生教学，主要是公共课和一批新型的学位课程的教学需要。教材作者都是多年从事研究生教学工作，有着丰富教学和科学研究经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外的最新学术动态，使研究生学习之后，能迅速接近当代科技发展的前沿，以适应"四化"建设的要求；其次，也注意到研究生公共课程和学位课程应有它最稳定、最基本的内容，是研究生掌握坚实的基础理论和系统的专门知识所必要的。因此，在研究生教材中仍应强调突出重点，突出基本原理和基本内容，以保持学位课程的相对稳定性和系统性，内容有足够的深度，而且对本门课程有较大的覆盖面。

这套《研究生教材》虽然从选题、大纲、组织编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致的定稿工作，但毕竟是第一次编辑这样高层次的教材系列，水平和经验都感不足，缺点与错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院
西安交通大学出版社
1989年12月

# 前　言

数学物理方程理论是数学科学中最为活跃的分支之一，它不但是很大一部分数学内容的基础，而且也是很大一部分物理内容的基础，它有助于人们对物质运动规律的认识。自然科学基本规律的精确数学表达式大都是微分方程，如 Newton 运动方程，Euler 方程，Navier-Stokes 方程，Maxwell 方程，Boltzmann 方程以及 Schrödinger 方程等。这些基本方程及其派生出来的方程几乎覆盖了一切科学工程领域，现代大型科学工程计算的主要任务，也是用现代大型计算机求解这些方程。

数学物理方程理论发展到今天，经典的和现代的互相渗透，形成内容十分丰富的分支。如何使应用数学、计算数学、物理和力学专业的研究生在较短的时间内，尽快地了解如此庞大理论体系中的主要结果和方法，以便结合数学和自然科学的各个分支，使它们互相渗透，有所创新。培养和训练研究生的这种能力，是近代科学综合发展趋势的要求，也是培养新一代科学工作者必不可少的环节。

从一个庞大的理论体系中选取一定的材料，使它不仅要包含原体系的主要结果和方法，还要自成体系、满足作为一本教材的种种要求，这不能不说是一件非常困难的事情。自 1980 年以来，我们经过多年的教学探索和实践，多次修改，撰写成本书，较好地达到了这一要求。

本书分两部分。第一部分（第一章到第四章）是广义函数和 Соболев 空间。主要阐述广义函数和 Соболев 空间的概念和基

本性质，尤其是一些有重要应用的 Соболев 空间性质。第二部分（第五章到第九章）是数学物理方程 Hilbert 空间方法。对椭圆型方程着重于变分原理和正则性理论；对发展方程，着重于用半群理论来讨论它的适定性问题；最后还讨论了在弹性力学、流体力学、电磁场和量子力学中的应用。

第一章广义函数和 Fourier 变换。本章较系统地阐述了建立 Соболев 空间的泛函基本知识。这样做为的是使学生从本科泛函分析课程中延续过来，起到承上启下的作用，使学生在一进入本课程时不致于太吃力。同时本章的讨论也为全书的展开打下了良好的基础。本章结构紧凑，各节的定义、定理及例子环环相扣，较简捷地处理了教材内容。

第二章 $L^p(\Omega)$空间。本章内容虽然是经典的，但它是了解 Соболев 空间所必需的。本章既介绍了 $L^p(\Omega)$空间的主要内容，又强调了一些常用的基本方法，同时还适当地略去了那些与 Соболев 空间关系不大的内容。

第三章整数阶 Соболев 空间 $H^{m,p}(\Omega)$，本章恰当地处理了庞大而复杂的内容，如内插性质、延拓性质以及嵌入性质等，既阐明了基本方法，使学生对这些性质的来龙去脉有个大致的了解，同时又不拘泥于琐碎的细节，繁简适当。

第四章实数阶 Соболев 空间和迹空间。推广了整数阶 Соболев 空间的性质，同时还讨论了若干向量值 Соболев 空间，它们在弹性力学、流体力学和电磁场中有广泛应用。

第五章抽象的椭圆边值变分问题。本章对线性椭圆变分问题、混合变分问题、三线性和拟线性变分问题等，讨论了解的存在性、迭代方法、收敛性以及正则性等问题。对它们的理论根据、实际背景均有一定交代，并对内容作了合理的组织和取舍。

第六章在椭圆边值问题中的应用。本章包括在 2m 阶线性椭

圆型方程和拟线性椭圆型方程中的应用．为了更好地理解理论和概念，这里给出了一些例子．使较短的篇幅包含了较多的内容．

本章的内容和以后两章是研究数学物理问题的基础．

第七章、第八章讨论了一、二阶发展方程．这两章采用了从抽象到具体的方法，不仅讲授了内容，而且展示了整个抽象的过程和方法，使得读者很自然地获得较完整的概念．

第九章应用前面提供的理论工具，较系统地讨论了弹性力学中 Navier–Lame 方程，流体力学中 Navier–Stokes 方程，电磁场中 Maxwell 方程，磁流体动力学方程，量子力学中的 Schrödinger 方程和 Klein–Gorden 方程等相应的变分问题的解的存在、唯一性、分叉和混沌等性质．

为了内容上的自封闭，我们不得不以附录形式，给出两部分内容．附录 A：非线性泛函分析中若干问题．主要讨论非线性泛函中的极值原理、位势型算子和单调算子等性质．这部分内容，多数命题、定理都有严格证明．附录 B：紧算子 Schauder–Riesz 理论，这部分内容是经典的，不加证明．但是很有用．

这里我们应该特别感谢周天孝、黄艾香两位教授．他们仔细地阅读了全部书稿，提出了非常宝贵的意见，由于他(她)们的努力，本书才能够以今天这样的面貌同读者见面．

由于作者水平所限，错误在所难免，热忱欢迎读者提出宝贵意见，谢谢！

作　者

1990.9.

# 目　录

# 第一章　广义函数和 Fourier 变换

本章从连续函数空间入手，建立广义函数空间，并且研究广义函数的可导性、结构及其运算，包括卷积和 Fourier 变换，同时给出了用途很广的磨光算子，平均函数及单位分解定理.

## §1.1　记号和说明

$\mathbf{R}^n$ 表示 $n$ 维 Euclid 空间，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中一个点，其内积和范数分别定义为

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\qquad |x|^2=(x,x),\quad \forall x,y\in R^n$$

若$x,y\in\mathbf{R}^n$，则点$x$和$y$之间的距离为

$$\mathrm{dist}(x,\ y)=|x-y|$$

若$G$是$\mathbf{R}^n$中的一个集合，则点$x\in\mathbf{R}^n$到$G$的距离为

$$\mathrm{dist}(x,\ G)=\inf_{y\in G}\ \mathrm{dist}(x,y)$$

若$G$、$H$是$\mathbf{R}^n$中两个集合，则集合$G$和$H$之间的距离为

$$\mathrm{dist}(G,\ H)=\inf_{x\in G}\ \mathrm{dist}(x,H)$$

若 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一开集，则称之为区域．又如 $G\subset\mathbf{R}^n$，则用$\overline{G}$ 表示 $G$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的闭包．如$\overline{G}\subset\Omega$ 且$\overline{G}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集（即有界闭集），则记为 $G\subset\subset\Omega$. 如果 $u$ 是定义在 $G$ 上的函数，则集合 $\{x\in G:\ u(x)\neq 0\}$ 的闭包定义为 $u$ 的支集，记为

$$\mathrm{supp}\ u=\overline{\{x\in G:u(x)\neq 0\}}$$

如果supp $u\subset\subset\Omega$，则称$u$在$\Omega$中具有紧支集.

用 $\partial\Omega$ 表示 $\Omega$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的边界，即集合$\bar{\Omega}\bigcap\Omega^c$，其中 $\Omega^c=\mathbf{R}^n\backslash\Omega=\{x\in\mathbf{R}^n:x\notin\Omega\}$ 是 $\Omega$ 的补集．

设向量 $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$，它的每个分量都是非负整数，所有这些向量的集合，称为 $n$ 重非负整数空间，记为 $Z^n_+$，也称 $\alpha$ 为 $n$ 重指标．若 $\alpha,\beta\in Z^n_+$，则规定 $|\alpha|=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j$，$\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$．如果 $\alpha_j\leqslant\beta_j,j=1,2,\cdots,n$，则称 $\alpha\leqslant\beta$．还有 $\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$．而且如果 $\alpha\leqslant\beta$，则

$$\binom{\beta}{\alpha}=\frac{\beta!}{\alpha!(\beta-\alpha)!}=\binom{\beta_1}{\alpha_1}\binom{\beta_2}{\alpha_2}\cdots\binom{\beta_n}{\alpha_n}$$

若 $\alpha\in Z^n_+$，则用 $x^\alpha$ 表示次数为$|\alpha|$ 的单项式 $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$．类似地，对于 $1\leqslant j\leqslant n$，

$$\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}，\ 其中\partial_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$$

表示阶数为$|\alpha|$的导数，显然$\partial^{(0,\cdots,0)}u=u$．

对于在$x$附近$|\alpha|$次连续可导函数$u$和$v$，容易证明Leibniz公式

$$\partial^\alpha(uv)(x)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta u(x)\partial^{\alpha-\beta}v(x)$$

## §1.2 连续函数空间

设$\Omega$是$\mathbf{R}^n$中的一个开子集，$\alpha\in Z^n_+$，$m$为非负整数．

集合 $\mathbf{C}^m(\Omega)$ 是由定义在 $\Omega$ 上，并在 $\Omega$ 上连续且具有直到 $m$ 阶连续的偏导数 $\partial^\alpha f$ $(|\alpha|\leqslant m)$ 的函数 $f$ 组成．

集合 $\mathbf{C}^m(\bar{\Omega})$ 是由 $\mathbf{C}^m(\Omega)$ 中这样的函数 $f$ 组成：$f$ 及其直到 $m$ 阶偏导数 $\partial^\alpha f(|\alpha|\leqslant m)$ 均在 $\Omega$ 上有界和一致连续．如定义范数为

$$\|f\|_{C^m(\bar{\Omega})}=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in\Omega}|\partial^\alpha f(x)| \tag{1.2.1}$$

则$C^m(\overline{\Omega})$是Banach空间.

通常用$C(\Omega)$表示$C^0(\Omega)$，$C(\overline{\Omega})$表示$C^0(\overline{\Omega})$.

$C_B(\Omega)$是由定义在$\Omega$上的有界连续函数的全体组成. 类似地可以定义$C_B^m(\Omega)$. $C_B^m(\Omega)$是Banach空间，其范数的定义与$C_B^m(\overline{\Omega})$的相同.

如果$0<\lambda\leqslant 1$，定义$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$是$C^m(\overline{\Omega})$的子空间，它由$C^m(\overline{\Omega})$中的这样的函数$f$组成：对于$0\leqslant|\alpha|\leqslant m$，$\partial^\alpha f$在$\Omega$中满足指数为$\lambda$的Hoelder条件，即存在常数$c$，使得

$$|\partial^\alpha f(x)-\partial^\alpha f(y)|\leqslant c|x-y|^\lambda \quad \forall x,y\in\Omega$$

如定义范数为

$$\|f\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})}=\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})}+\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}}\frac{|\partial^\alpha f(x)-\partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda} \tag{1.2.2}$$

则$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 是Banach空间，称指标为$(m,\lambda)$的Hoelder空间.

如果$\Omega$是有界区域，下面两个众所周知的定理对于确定$C(\overline{\Omega})$的子集合的稠密性和紧性提供了有效的判别准则.

**定理 1.2.1** (Stone－Weierstrass 定理) 设$\Omega$是$R^n$中的有界区域. 如果$C(\overline{\Omega})$的子集合$A$满足

(1) 如果$f,g\in A$且$c\in K$, K为一数域. 则$f+g$，$fg$和$cf$都属于A；

(2) 如果$f\in A$，则$\bar{f}\in A$，其中$\bar{f}$是$f$的复共轭；

(3) 如果$x,y\in\overline{\Omega}$，$x\neq y$,则存在$f\in A$,使得$f(x)\neq f(y)$；

(4) 如果$x\in\overline{\Omega}$，则存在$f\in A$，使得$f(x)\neq 0$.

那么$A$在$C(\overline{\Omega})$中稠密.

**推论 1.2.1**(Weierstrass) 设$\Omega$是$R^n$中的有界区域，$f\in C(\overline{\Omega})$，则对任意一个$\varepsilon>0$，存在一个多项式$P(x)$满足

$$\|f-P\|_{C(\overline{\Omega})}<\varepsilon$$

**定理 1.2.2** (Ascoli－Arzela 定理) 设$\Omega$是$R^n$中有界区

域，$C(\overline{\Omega})$ 的子集合 $A$ 在 $C(\overline{\Omega})$ 中是准紧（相对紧）的，如果 $A$ 满足：

(1) 存在常数 $M$，使得对一切 $f\in A$ 和 $x\in\Omega$，$|f(x)|\leqslant M$；

(2) 对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得如果 $f\in A, x, y\in\Omega$，而且 $|x-y|<\delta$，则 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

令 $C^{\infty}(\Omega)=\bigcap\limits_{m=0}^{\infty}C^{m}(\Omega)$，它是 $\Omega$ 上无穷次连续可微函数的全体．$C^{\infty}(\Omega)$ 中函数本身及其偏导数可以在 $\Omega$ 上无界．类似地可以定义 $C^{\infty}(R^{n})$，把 $C^{\infty}(R^{n})$ 中的函数在 $\Omega$ 上的限制所得的函数全体记为 $C^{\infty}(R^{n}, \Omega)$，即

$$C^{\infty}(R^{n},\Omega)=\{u:\ u=v|_{\Omega}, v\in C^{\infty}(R^{n})\}$$

显然，$C^{\infty}(R^{n}, \Omega)\subset C^{\infty}(\Omega)$.

定义 $C_{0}(\Omega)=\{f\in C(\Omega):\ \mathrm{supp}\ f\subset\subset\Omega\}$

$$C_{0}^{\infty}(\Omega)=\{f\in C^{\infty}(\Omega):\ \mathrm{supp}\ f\subset\subset\Omega\}.$$

类似地有 $C_{0}^{m}(\Omega)$，$C_{0}^{\infty}(R^{n})$. 把 $C_{0}^{\infty}(R^{n})$ 中的函数限制在 $\Omega$，所得函数的全体组成 $C_{0}^{\infty}(R^{n}, \Omega)$.

为了以后的讨论，这里给出 $C^{\infty}(\Omega)$ 内有界集的定义．若 $A$ 是由 $C^{\infty}(\Omega)$ 中的部分元素组成的集合，如对任意给定的整数 $m\geqslant 0$ 和紧集 $K\subset\Omega$，存在只依赖于 $m$ 和 $K$ 的常数 $c>0$，使得

$$|\partial^{\alpha}\psi(x)|\leqslant c, \forall\alpha\in Z_{+}^{n}, |\alpha|\leqslant m, \forall\psi\in A,\ x\in K.$$

则称 $A$ 是 $C^{\infty}(\Omega)$ 中的有界集合.

相应地，集合 $A$ 在 $C_{0}^{\infty}(\Omega)$ 中有界是指存在紧子集 $K\subset\Omega$，使得 $\mathrm{supp}\ \psi\subset K$，$\forall\psi\in A$ 且 $\forall\alpha\in Z_{+}^{n}$，存在常数 $c_{\alpha}$，使得

$$|\partial^{\alpha}\psi(x)|\leqslant c_{\alpha},\ \forall x\in K,\ \forall\psi\in A.$$

设 $p$ 为一正实数，$u$ 为 $\Omega$ 上的可测函数，则定义

$$L^{p}(\Omega)=\{u:\ \int_{\Omega}|u|^{p}dx<\infty\} \qquad (1.2.3)$$

在 $L^{p}(\Omega)$ 中，把两个定义在 $\Omega$ 上几乎处处相等的函数 $u_{1}(x)$ 和 $u_{2}(x)$（即在 $\Omega$ 中除去一个零测集之外，$u_{1}(x)=u_{2}(x)$）称为是等

价的．因此 $L^p(\Omega)$ 中的元素是满足 $\int_\Omega |u|^p dx < \infty$ 的可测函数等价类．其范数定义为

$$\|u\|_{0,p,\Omega} = \{\int_\Omega |u|^p dx\}^{1/p} \tag{1.2.4}$$

用 $L^\infty(\Omega)$ 表示在 $\Omega$ 中除去一个零测集之外是有界的可测函数 $u(x)$ 全体．若 $u\in L^\infty(\Omega)$，则存在一个常数 $c$(与 $u(x)$ 有关) 使得 $|u(x)| \leq c$ 几乎处处成立．定义其范数为

$$\|u\|_{0,\infty\Omega} = \operatorname{ess}\sup_{x\in\Omega}|u(x)| = \inf\{c:|u(x)| \leq c\} \tag{1.2.5}$$

## §1.3 检验函数空间

1° 引言 在分析领域，古典函数已不能满足实际的需要．例如偏微分方程的解，已经不能为古典函数所描述，许多物理量也不能为古典函数所刻划，这就需要扩大函数的概念．广义函数理论从此被建立起来．完整的广义函数理论是由 Schwartz 等人建立的，它是作为泛函而被引入的．然而应该选择怎样的函数空间，使得在它上面的线性连续泛函可以作为广义函数呢？

首先考察 $L^2(\Omega)$ 空间，由 Ricsz 表示定理知对于 $L^2(\Omega)$ 上的任一线性连续泛函 $l\in(L^2(\Omega))'$($L^2(\Omega)$ 的对偶空间)，存在着唯一的函数 $u\in L^2(\Omega)$，使得对于任意 $v\in L^2(\Omega)$ 有 $<l,v> = (u,v) = \int_\Omega uv dx$. 反之，$L^2(\Omega)$ 中任一函数，可以利用上式建立一个 $L^2(\Omega)$ 上的线性连续泛函．这就在 $L^2(\Omega)$ 和 $(L^2(\Omega))'$ 之间建立了一一对应的关系．由 Ricsz 表示定理知，这种对应关系实际上是等距同构，即 $\|l\|_{(L^2(\Omega))'} = \|u\|_{0,2,\Omega}$．这说明，如我们取 $(L^2(\Omega))'$ 中的元素作为广义函数，则没有扩大所研究的函数的范围．

其次考察 $L^p(\Omega)$ 空间，且 $\Omega$ 是有界区域，$p>2$. 在定

理 2.3.1 中将会看到 $L^{p'}(\Omega)$ 与其对偶空间 $(L^p(\Omega))'$ 有着等距同构关系，记为 $(L^p(\Omega))' \simeq L^{p'}(\Omega)$，其中 $1/p+1/p'=1$. 因为 $p>2$，有 $1<p'<2$，由 Hoelder 不等式容易证明，$\forall u \in L^p(\Omega)$，必有 $u \in L^{p'}(\Omega)$ 且范数满足

$$\|u\|_{0,p',\Omega} \leqslant (\mu(\Omega))^{(1/p')-(1/p)}\|u\|_{0,p,\Omega},\ \left(\mu(\Omega)=\int_\Omega dx\right)$$

这说明，如果我们把 $(L^p(\Omega))'$ 中的元素作为广义函数，则扩充了所研究的函数空间 $L^p(\Omega)$.

最后，考察由

$$l(\psi)=\psi(0) \qquad \forall \psi \in C_B(\Omega)$$

所定义的线性泛函，称其为 $\delta$ 函数或 Dirac 函数，记为

$$\delta(\psi)=<\delta,\ \psi>=\psi(0),$$

或 $\delta(\psi)=\int_\Omega \delta(x)\psi(x)dx$.

可以证明，线性泛函 $\delta$ 在 $C_B(\Omega)$ 的范数下是连续的．事实上，令 $\psi_n(x) \in C_B(\Omega)$，且满足

$$\|\psi_n(x)\|_{C_B(\Omega)} \to 0, \quad \text{当} n \to \infty \text{时}.$$

显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta(\psi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(0)=0$，所以 $\delta(\psi)$ 是连续的．然而，我们找不到一个连续函数 $f(x)$，使得

$$\int_\Omega f(x)\psi(x)dx=\psi(0) \quad \forall \psi \in C_B(\Omega)$$

在后面的讨论中，我们还将知道，甚至我们找不到一个可积函数 $f(x)$，使得上式成立.

引入泛函序列

$$<\delta_h,\psi>=\int_\Omega \delta_h(x)\psi(x)dx \quad \forall \psi \in C(\Omega)$$

其中 $\omega_n$ 是 $R^n$ 中单位球体积，以及

$$\delta_h(x)=\begin{cases}(\omega_n h^n)^{-1} & |x| \leqslant h \\ 0 & |x|>h\end{cases}$$

由中值定理，有

$$\int_{\Omega}\delta_h(x)\psi(x)dx=\psi(\xi)$$

其中 $\xi\in B_h(0)$.$B_h(0)$ 表示中心在原点，半径为 $h$ 的闭球．显然，当 $h\to 0$ 时，$\xi\to 0$，故 $\lim\limits_{h\to 0}<\delta_h,\psi>=\psi(0)=<\delta,\psi>$．因此，$\delta$ 可以看作泛函序列 $\delta_h$ 在某种意义下的极限

由上述分析，不难看出，函数空间的性质越好，则在此函数空间上所定义的泛函就越多，其对偶空间就越广.我们把定义在一些特定的函数空间上的连续线性泛函称为广义函数，而这些特定的函数空间称为检验函数空间.

2°.检验空间$C^{\infty}(\Omega)$，$C_0^{\infty}(\Omega)$以及空间$E(\Omega)$，$D(\Omega)$

$C^m(\Omega)$在加法和数乘运算下是一个线性空间.

对于$\Omega$的任一紧子集$K$和$\alpha\in Z_+^n$，定义半范如下，

$$p_{K,m}(f)=\max_{|\alpha|\leq m}\sup_{x\in K}|\partial^{\alpha}f(x)| \quad \forall f\in C^m(\Omega).$$

于是 $C^m(\Omega)$ 在这族半范数下成为一个局部凸拓扑空间，记为 $E^m(\Omega)$. 在这个空间 $E^m(\Omega)$ 中，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$就意味着在 $\Omega$ 的每一个紧子集 $K$ 上，对每一个 $\alpha\in Z_+^n$，$|\alpha|\leqslant m$，$\lim\limits_{n\to\infty}\partial^{\alpha}f_n(x)=\partial^{\alpha}f(x)$ 一致地成立．

可以证明$E^m(\Omega)$是一个拓扑空间.

对于 $C^{\infty}(\Omega)$ 空间，可数半范族 $\{p_{K,m}\}(m=0,1,2,\cdots)$ 定义了 $C^{\infty}(\Omega)$ 上的一个局部凸拓朴空间，记为 $E(\Omega)$. 类似地，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ 就是在 $\Omega$ 的每一个紧子集 $K$ 上，对每一个 $\alpha\in Z_+^n$，$|\alpha|<\infty$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\partial^{\alpha}f_n(x)=\partial^{\alpha}f(x)$ 一致地成立．

$C_0^{\infty}(\Omega)$ 在加法和数乘运算下是一个线性空间．对于 $\Omega$ 的任

一紧子集 $K$, 设 $C_K^\infty(\Omega)=\{f\in C_0^\infty(\Omega):\ \mathrm{supp}\ f\subset K\}$. 在 $C_K^\infty(\Omega)$ 上定义半范族

$$p_{K,m}(f)=\sup_{|\alpha|\leqslant m\ x\in K}|\partial^\alpha f(x)|,\ m<\infty.$$

于是 $C_K^\infty(\Omega)$ 成为一个局部凸拓朴线性空间，且当 $K_1\subseteq K_2$ 时，$C_K^\infty(\Omega)$ 的拓朴与 $C_{K_1}^\infty(\Omega)$ 作为 $C_{K_2}^\infty(\Omega)$ 的一个子集的相对拓扑是恒同的．从而诸 $C_K^\infty(\Omega)$( 这里 $K$ 取遍 $\Omega$ 的所有紧子集 ) 的诱导 ( 或归纳 ) 极限是一个局部凸线性拓扑空间．用这样的方法把 $C_0^\infty(\Omega)$ 拓朴化后记为 $D(\Omega)$. 在空间 $D(\Omega)$ 中，收敛 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$

意味着满足如下两个条件：1　存在 $\Omega$ 的某个紧子集 $K$，使得 $\mathrm{supp}f\subset K$ 和 $\mathrm{supp}f_n\subset K(n=1,2,\cdots)$ 以及 2　对任意的微分算子 $\partial^\alpha$，序列 $\partial^\alpha f_n(x)$ 在 $K$ 上都一致收敛于 $\partial^\alpha f(x)$.$D(\Omega)$ 在广义函数的定义中有重要的作用．

例1　令$\psi(x)=\begin{cases}\exp(|x|^2-1)^{-1} & 当|x|<1时,\\ 0 & 当|x|\geqslant 1时,\end{cases}$

则 $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，而且 $\mathrm{supp}\psi\subset\{x:|x|\leqslant 1\}=B_1(0)$，即以 $x=0$ 为中心，以 1 为半径的闭球．引入规格化常数 $c=\int_{\mathbf{R}^n}\psi(x)dx$ 后，如记

$$\alpha(x)=\psi(x)/c$$

则有 $\alpha(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$;$\int_{\mathbf{R}^n}\alpha(x)dx=1$;$\mathrm{supp}\alpha(x)=B_1(0)$ 以及 $\alpha(x)\geqslant 0,\forall x\in\mathbf{R}^n$.

例 2　特征函数，设球 $B_R(0)=\{x:|x|\leqslant R\}$( 或简记为 $B_R$), 则函数

$$\chi_R(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant R\\ 0 & |x|>R\end{cases}$$

称为$B_R$的特征函数.

令　$\beta_R(x)=\int_{R^n}\chi_R(x-t)\alpha(t)dt=\int_{R^n}\chi_R(t)\alpha(x-t)dt$

显然，$\beta_R(x)$ 是特征函数 $\chi_R(x)$ 在以 $x$ 为中心，以 R 为半径的球内的带权平均函数，因为 $\chi_R(x)$ 和 $\alpha(x)$ 都具有紧支集，所以 $\beta_R(x)$ 是存在的，又通过积分号下求导，容易证明
$\beta_R(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$以及$\mathrm{supp}\beta_R(x)\subset B_{R+1}$;$\beta_R(x)\equiv 1,\forall x\in B_{R-1}$.

**引理1.3.1.** $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$在$C^\infty(\mathbf{R}^n)$内是稠密的.

实际上，$\forall\psi(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，构造函数序列 $\psi_n(x)=\beta_n(x)\psi(x)$，其中 $\beta_n(x)$ 与例 2 中定义的相同．则 $\psi_n(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，且

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\psi(x) & \forall|x|\leqslant n-1\\ 0 & \forall|x|\geqslant n+1\end{cases}$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，在 $\mathbf{R}^n$ 的每一个固定的紧子集 $K$ 上，$\psi_n(x)\equiv\psi(x)$. 从而按照 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 空间的拓扑，$\psi_n(x)\to\psi(x)$.

**例 3**　设 $\alpha(x)$ 为例 1 中所定义的．令 $\psi_n(x)=\alpha(x_1-n,x_2,\cdots,x_n)$，则当 $n\to\infty$ 时，$\psi_n(x)$ 的支集趋于无限远．故在 $\mathbf{R}^n$ 内的任一紧集上，从某一个 $n$ 起，有 $\psi_n(x)\equiv 0$. 按照 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 空间的拓扑，$\psi_n(x)\to 0$. 另一方面，由于所有的 $\psi_n(x)$ 的支集不可能同时包含于 $\mathbf{R}^n$ 的一个紧子集 $K$ 上，则按照 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 空间的拓扑，也有 $\psi_n(x)\to 0$.

**引理 1.3.2.**　若 $\Omega$ 为开集，则对任一紧集 $K\subset\subset\Omega$，存在 $\psi(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，使得 $0\leqslant\psi(x)\leqslant 1,\forall x\in\Omega$；$\mathrm{supp}\psi(x)\subset\Omega$ 以及 $\psi(x)\equiv 1,\forall x\in K$.

证：记 $d=\mathrm{dist}(K,\partial\Omega)>0$，又记 $\Omega_h=\{x\in\Omega:\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)\geqslant h\}$，则有 $K\subset\Omega_d$. 作函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \forall x\in\Omega_{d/2}\\ 0 & \forall x\notin\Omega_{d/2}\end{cases}$$

以及函数 $\psi(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x-y)\alpha_{d/4}(y)dy$，这里 $\alpha_{d/4}(y)$ 同例 1 中

定义的，即

$$\alpha_{d/4}(x)=\begin{cases}\left[\exp(|x|^2-d^2/16)^{-1}\right]/c & \forall|x|<d/4\\ 0 & \forall|x|\geqslant d/4\end{cases}$$

则 $\operatorname{supp}\alpha_{d/4}(x)=B_{d/4}(x)$. 由 $\psi(x)$ 的定义，容易验证 $\psi(x)=1$，$\forall x\in K$ 时；$\psi(x)\equiv 0$，$\forall x\notin\Omega_{d/4}$. 在积分号下求导，可得 $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，故命题得证.

**例 4** 设 $A$ 和 $a$ 是两实数，$0<a<A$，记 $B_A$ 和 $B_{A-a}$ 分别是两个半径为 $A$ 和 $A-a$ 的同心球，则存在函数 $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，使得 (1) $\operatorname{supp}\psi\subset B_A$；(2) 在 $B_{A-a}$ 上，$\psi(x)=1$；(3) 对所有 $\alpha\in Z_+^n$，$|\partial^\alpha\psi(x)|\leqslant c(\alpha,n)\cdot a^{-|\alpha|}\ \forall x\in\mathbf{R}^n$.

**证** 设 $\chi$ 是半径为 $A-(2a/3)$ 的同心球的特征函数，定义

$$\psi(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\chi(y)\alpha_\delta(x-y)dy=\int_{B_{A-(2a/3)}}\alpha_\delta(x-y)dy$$

$$=\frac{1}{\delta^n}\int_{B_{A-(2a/3)}}\alpha\left(\frac{x-y}{\delta}\right)dy$$

其中 $\delta=a/3$. 显然 $\operatorname{supp}\psi\subset B_A$，并且在 $B_{A-a}$ 上 $\psi=1$.

对 $1\leqslant j\leqslant n$，有

$$\partial_j\psi(x)=\frac{1}{\delta^{n+1}}\int_{B_{A-(2a/3)}}\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\left(\frac{x-y}{\delta}\right)dy,$$

于是

$$|\partial_j\psi(x)|\leqslant\left(\int_{\mathbf{R}^n}\partial_j\alpha\left(\frac{y}{\delta}\right)dy\right)/\delta^{n+1}$$

$$=(\delta)^{-1}\int_{\mathbf{R}^n}\partial_j\alpha(t)dt\leqslant c(j,\ n)a^{-1}.$$

如此类似地证明下去,则可得(3). 证毕.

3° 急降函数空间 $\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$

**定义 1.3.1** 设定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 $f$ 满足 (1) $f(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，(2) 对任何 $\alpha$，$\beta\in Z_+^n$，有 $\lim\limits_{|x|\to\infty}|x^\alpha\partial^\beta f(x)|=0$，则称 $f(x)$ 为急降函数(或在无穷远处急速下降).

例5 函数$f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$是急降函数.

**定义 1.3.2** 所有在无穷远处急速下降的$C^\infty(\mathbf{R}^n)$中的函数，组成急降函数空间，记为$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$. 在$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$中引入函数的和以及函数同复数乘法的代数运算，并且定义半范族如下，

$$p_{\alpha,\beta}(f)=\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta f(x)| \qquad \forall\alpha.\beta\in Z_+^n$$

在这个半范族确定的拓扑下，$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$是一个局部凸的线性拓扑空间，记为$S(\mathbf{R}^n)$. 在空间$S(\mathbf{R}^n)$中，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$意味着对所有的$\alpha,\beta\in Z_+^n$，$x^\alpha\partial^\beta f_n(x)\to x^\alpha\partial^\beta f(x)(n\to\infty)$在$\mathbf{R}^n$上是一致的.

**定理 1.3.1** 急降函数定义 1.3.1 的条件(2)与下列两个条件中之一等价:

(1) $\forall\alpha,\beta\in Z_+^n$，$x^\alpha\partial^\beta f(x)$ 在$\mathbf{R}^n$上一致有界.

(2) $\forall\beta\in Z_+^n$，$k\in Z_+^1$，$(1+|x|^2)^k\partial^\beta f(x)$ 在$\mathbf{R}^n$上一致有界.

**证:** 首先由急降函数定义中条件(2)知$x^\alpha\partial^\beta f$在$\mathbf{R}^n$上有界. 反之，若$\forall\alpha,\beta\in Z_+^n$，$x^\alpha\partial^\beta f$有界，又

$$x^\alpha\partial^\beta f(x)=\left(\sum_{j=1}^n x_j^2x^\alpha\partial^\beta f(x)\right)/|x|^2 \quad \forall|x|\neq 0$$

从而由$x_j^2x^\alpha\partial^\beta f(x)$在$\mathbf{R}^n$上有界性推出$x^\alpha\partial^\beta f(x)\to 0$，$\forall|x|\to\infty$. 故得定义中条件(2)与本命题(1)等价.

其次，当$|x|^2>1$时，有

$$|x|^{2k}<(1+|x|^2)^k<2^k|x|^{2k}$$

因此$(1+|x|^2)^k\partial^\beta f$在$\mathbf{R}^n$上有界与$x^\alpha\partial^\beta f$在$\mathbf{R}^n$上有界等价. 证毕.

例6 $\exp(-|x|^2)\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$

事实上，$x^\alpha\partial^\beta\exp(-|x|^2)$都是形如$c_\gamma x^\gamma\exp(-|x|^2)$项之和. 当$|x|\to\infty$时，$\exp(-|x|^2)$比$x$的任意次幂更快地趋于零. 所以$\exp(-|x|^2)$在无穷远处是急降的.

利用§1.1中的记号，一个阶$\leqslant m$的导算子可写为

$$P(x,\partial)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$$

其中 $a_\alpha(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 内某个开集上的复值函数．当系数 $a_\alpha(x)$ 都是常数时，简记为

$$P(\partial)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha\partial^\alpha$$

**定理 1.3.2** 设 $P(x)$ 是一个常系数的多项式，$Q(\partial)$ 是一个常系数的线性导算子，则下列条件是等价的：

(1) $f\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$;

(2) $\forall P(x)$，$Q(\partial)$，$P(x)Q(\partial)f\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$;

(3) $\forall P(x)$，$Q(\partial)$，$Q(\partial)(P(x)f(x))\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$.

**证** 因为 $P(x)Q(\partial)f$ 可以写成形如定理 1.3.1 中 $x^\alpha\partial^\beta f(x)$ 的线性组合，所以由条件 (1) 推出 (2) 是显然的．又由条件 (2) 显然可以推出条件 (1).

由 Leibniz 公式容易知道 $Q(\partial)(P(x)f(x))$ 也是 $x^\alpha\partial^\beta f(x)$ 的线性组合，于是由条件 (1) 可得条件 (3). 而由 (3) 推出 (1) 是显然的． 证毕．

**定理 1.3.3** 下述包含关系成立：

$$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)\subset\tilde{S}(\mathbf{R}^n)\subset C^\infty(\mathbf{R}^n)$$

并且 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 是 $\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$ 的一个稠密子空间，$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$ 是 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的一个稠密子空间．

**证** 由引理 1.3.1 知 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 在 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中稠密．所以 $\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$ 在 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中稠密．下面证明 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 在 $\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$ 中稠密．任取 $f\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$，在 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中构造函数 $\psi(x)$，使满足 $\psi(x)=1$，当 $|x|\leqslant 1$ 时．

令 $f_\varepsilon(x)=\psi(\varepsilon x)f(x)$，则有 $f_\varepsilon(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 且

$$f_\varepsilon(x)-f(x)=(\psi(\varepsilon x)-1)f(x)=0 \qquad \forall|x|\leqslant 1/\varepsilon$$

对任意固定的 $\alpha,\beta\in Z_+^n$，由Leibniz公式有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\beta\partial^\alpha(f_\varepsilon(x)-f(x))|=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\beta\partial^\alpha((\psi(\varepsilon x)-1)f(x))|$$

$$=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\sum_{\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\partial^\gamma(\psi(\varepsilon x)-1)x^\beta\partial^{\alpha-\gamma}f(x)\right|$$

$$\leqslant\sum_{\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\gamma(\psi(\varepsilon x)-1)|\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\beta\partial^{\alpha-\gamma}f(x)|$$

$$=\sum_{0<\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\gamma(\psi(\varepsilon x)-1)|\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\beta\partial^{\alpha-\gamma}f(x)|$$

$$+\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|(\psi(\varepsilon x)-1)\ x^\beta\partial^\alpha f(x)|$$

如果 $\gamma>0$，则有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\gamma(\psi(\varepsilon x)-1)|\leqslant\varepsilon^{|\gamma|}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\gamma\psi(x)|$$

如果 $\gamma=0$，则有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|(\psi(\varepsilon x)-1)x^\beta\partial^\alpha f(x)|$$

$$=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\frac{(\psi(\varepsilon x)-1)}{(1+|x|^2)}(1+|x|^2)x^\beta\partial^\alpha f(x)\right|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)}\left(1+\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\psi(\varepsilon x)|\right)$$

$$\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|(1+|x|^2)x^\beta\partial^\alpha f(x)|$$

注意到 $\tilde{S}(\mathbb{R}^n)$、定理1.3.2以及$\psi$的定义，易知当$\varepsilon\to0$时，

$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\beta\partial^\alpha(f_\varepsilon(x)-f(x))|\to0\quad\forall\alpha,\beta\in Z_+^n$。则按照$\tilde{S}(\mathbb{R}^n)$的拓扑，$f_\varepsilon(x)$ 在$\tilde{S}(\mathbb{R}^n)$中收敛于 $f(x)$. 证毕．

实际上，在这三个空间的拓扑中前一个比后一个强，即由前一个空间的收敛性可以推出后一个空间的收敛性．例如，如$\{\psi_n\}\subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，且在 $D(\mathbb{R}^n)$ 的拓扑下，$\psi_n\to0$. 则 $\operatorname{supp}\psi_n$

$\subset K\ (n=1,2,\cdots)$，$K$是一个紧集；且在$K$上，$\forall \beta\in Z_+^n$，

$\sup\limits_{x\in K}|\partial^\beta\psi_n|\to 0$．由$K$的有界性，有$\sup\limits_{x\in K}|x^\alpha\partial^\beta\psi_n|\to 0$，

$\forall\alpha\in Z_+^n$．又由$\psi_n$在$K$外为0，故有$\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta\psi_n|\to 0$，$\forall\alpha,\beta$

$\in Z_+^n$，此即在$S(\mathbf{R}^n)$的拓扑下，$\psi_n\to 0$．至于$S(\mathbf{R}^n)$中$\psi_n\to 0$推出在$\mathrm{E}(\mathbf{R}^n)$的拓扑下，$\psi_n\to 0$是容易的．在这个意义上，我们有时称拓扑空间$D(\mathbf{R}^n)$和$S(\mathbf{R}^n)$之间存在着连续嵌入的包含关系，则定理1.3.3可以改述为

**定理1.3.4** 下述连续嵌入的包含关系成立

$$D(\mathbf{R}^n)\subset S(\mathbf{R}^n)\subset \mathrm{E}(\mathbf{R}^n)$$

**定理1.3.5** $\forall 1\leqslant p<\infty$，有$\tilde{\mathrm{S}}(\mathbf{R}^n)\subset L^p(\mathbf{R}^n)$

**证** $\forall f\in\tilde{\mathrm{S}}(\mathbf{R}^n)$，有

$$\int_{\mathbf{R}^n}|f|^p dx=\int_{\mathbf{R}^n}|(1+|x|)^{-(n+1)}(1+|x|)^{(n+1)}f|^p dx$$

$$\leqslant\{\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|(1+|x|)^{(n+1)}f(x)|\}^p\int_{\mathbf{R}^n}(1+|x|)^{-(n+1)p}dx$$

而$\int_{\mathbf{R}^n}(1+|x|)^{-(n+1)p}dx<\infty$，所以$f\in\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$．证毕．

## §1.4 广义函数空间

### 1° D′(Ω)广义函数

广义函数是作为检验函数空间上的线性有界泛函而引入的．为此必须首先定义空间D(Ω)的拓扑对偶．

称$T$为D(Ω)上的线性连续泛函，如果满足

(1) 对任一$f\in$ D(Ω)，存在一个实数$T_f$(或记为$\langle T,f\rangle$)与之对应；

(2) 设$\lambda_1$，$\lambda_2\in\mathbf{K}$，$\mathbf{K}$为一数域，又$f_1$，$f_2\in$ D(Ω)，则

$$< T, \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 > = \lambda_1 < T, f_1 > + \lambda_2 < T, f_2 >$$

即泛函具有可加性;

(3) 如在空间 $D(\Omega)$ 的收敛意义(拓扑)下,有

$$\lim_{n \to \infty} < T, f_n > = < T, f > \quad (\text{当} f_n \to f \text{时})$$

即泛函是连续的.

**定义 1.4.1** $D'(\Omega)$表示 $D(\Omega)$上所有连续线性泛函的全体.$D'(\Omega)$中的每一个元素称为广义函数或分布.

如果 $T \in D'(\Omega)$, $f \in D(\Omega)$, 则称 $T(f)$为广义函数 $T$ 在检验函数 $f$处的值,有时也记为$< T, f >$.

设 $T_1$, $T_2 \in D'(\Omega)$, $\alpha \in K$, K 为一数域.则 $D'(\Omega)$上元素之间的加法运算和元素与数的乘法运算定义如下:

$$< T_1 + T_2, \psi > = < T_1, \psi > + < T_2, \psi > \quad \forall \psi \in D(\Omega)$$

$$< \alpha T, \psi > = \alpha < T, \psi > \quad \forall \psi \in D(\Omega)$$

如果这样定义的 $T_1 + T_2$, $\alpha T$ 都是 $D'(\Omega)$中的元素,那么 $D'(\Omega)$成为向量空间.

$D'(\Omega)$上的收敛分为弱收敛和强收敛两种.$D'(\Omega)$上的弱收敛是由与 $C_0^\infty(\Omega)$中元素相联系的一族半范

$$p_\psi(T) = \quad < T, \psi >$$

所定义的,这里 $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $T \in D'(\Omega)$.

$D'(\Omega)$的元素序列$\{T_j\}$弱收敛于 0 当且仅当$\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)$,数列$\{ < T_j, \psi > \}$收敛于 0.

而 $D'(\Omega)$的元素序列$\{T_j\}$强收敛于 0 当且仅当数列$\{ < T_j, \psi > \}$在 $C_0^\infty(\Omega)$的每一个有界集上一致收敛于 0.即 $D'(\Omega)$上的强收敛是在 $C_0^\infty(\Omega)$的有界集上一致收敛.

**例 7** 设$f$是$\Omega$上的局部可积函数,即$f$在$\Omega$内的每一个紧子集 K 上可积(在 Lebcsgue 意义下).则由

$$< T_f, \psi > = \int_\Omega f \psi dx \quad \forall \psi \in D(\Omega)$$

可义定义 D(Ω)上的一个线性连续泛函，用 $T_f$表示.$T_f$ 的可加性是显然的.现在证明 $T_f$ 的连续性.

设$\{\psi_n\}$在 D(Ω)中收敛于 $\psi$，于是存在一个 $K\subset\subset\Omega$，使得 $\mathrm{supp}(\psi_n-\psi)\subset K$ 成立.

$$|T_f\psi_n-T_f\psi|=\left|\int_\Omega f(\psi_n-\psi)dx\right|$$

$$=\left|\int_K f(\psi_n-\psi)dx\right|\leqslant\sup_{x\in K}|(\psi_n-\psi)|\int_K|f|dx$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in K}|\psi_n-\psi|=0,\int_K|f|dx<+\infty$,于是$\lim\limits_{n\to\infty}T_f\ \psi_n=T_f\psi$,因而$T_f$是$D(\Omega)$上的线性连续泛函.

若用 $L^1_{loc}(\Omega)$表示 Ω 上局部可积函数全体，则 $L^1_{loc}(\Omega)$中不同的元素，产生的广义函数也是不同的.

显然 $C^m(\Omega)$的函数，$L^p(\Omega)(1\leqslant p\leqslant\infty)$的函数，都可产生 Ω 上的广义函数.在 § 1.3 中引入的 $\delta$ 函数也是 D′(Ω)中的广义函数.

**定理 1.4.1** 一个线性泛函 $T$ 是 D′(Ω)中的广义函数，当且仅当对每个紧集 $K\subset\Omega$，存在常数 $c>0$ 和正整数 $m\geqslant0$，使得

$$|\langle T,\psi\rangle|\leqslant c\sup_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\ x\in\Omega}}|\partial^\alpha\psi(x)|\quad\forall\psi\in C_K^\infty(\Omega)\tag{1.4.1}$$

这里$C_K^\infty(\Omega)=\{f\in C_0^\infty(\Omega):\ \mathrm{supp}f\subset K\}$

**证** 用反证法证明必要性.如果 $T\in D'(\Omega)$，而(1.4.1)不成立.则可以找到一个序列$\{\psi_n\}\subset D(\Omega)$，满足 $\mathrm{supp}\psi_n\subset K$ 以及

$$|\langle T,\psi_n\rangle|>n\sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leqslant n}}|\partial^\alpha\psi_n(x)|$$

记

$$\varphi_n(x)=\frac{\psi_n(x)}{n\sup\limits_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leqslant n}}|\partial^\alpha\psi_n(x)|}$$

则有$\mathrm{supp}\varphi_n(x)\subset K$，并且对任意$m\leqslant n$，有

$$\sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\le m}}|\partial^\alpha\varphi_n(x)|\le\frac{\sup\limits_{\substack{x\in K\\|\alpha|\le m}}|\partial^\alpha\psi_n(x)|}{n\sup\limits_{\substack{x\in K\\|\alpha|\le m}}|\partial^\alpha\psi_n(x)|}\le\frac{1}{n}\to 0\quad(n\to\infty)$$

因此在$D(\Omega)$空间中收敛的意义下，$\varphi_n(x)\to 0$.但是另一方面，$|<T,\ \varphi_n>|>1$，这与$T\in D'(\Omega)$矛盾.

充分性．若 $T$ 是 D(Ω)上线性泛函，且满足(1.4.1)式.要证明 $T\in$ D′(Ω)，即证 $T$ 的连续性.在 $C_0^\infty(\Omega)$中任取序列 $\psi_n$，使之在 D(Ω)中收敛于 0.由定义知存在一紧集 $K\subset\subset\Omega$，使得 $\mathrm{supp}\psi_n\subset$ K，对于这个 K，由假设知存在 $c$ 及整数 $m\geqslant 0$，使得(1.4.1)式成立.又在 D(Ω)中 $\psi_n\to 0$，从而必有

$$\sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\le m}}|\partial^\alpha\psi_n(x)|\to 0$$

以及$<T,\psi_n>\to 0$，此即 $T$ 的连续性.证毕.

应该指出，(1.4.1)是一个不易验证的条件.当证明一个线性泛函是否为一个广义函数时，我们时常用广义函数的下列特征，它是用 $C_0^\infty(\Omega)$中收敛序列来描述的.

**定理 1.4.2**　$T\in D'(\Omega)$ 当且仅当对 $C_0^\infty(\Omega)$ 中每一个收敛于 0 的序列 $\{\varphi_n\}$，数列 $\{<T,\varphi_n>\}$ 收敛于 0.

**证**　设 $T\in D'(\Omega)$，又设$\{\varphi_n\}$是在 D(Ω)中收敛于 0 的一个序列，则由 D(Ω)中收敛的定义知道存在紧子集 $K\subset\Omega$，使得 $\varphi_n\in C_K^\infty(\Omega)(n>0)$和在 $C_K^\infty(\Omega)$中 $\varphi_n\to 0$ 成立.因为 $T$ 在 $C_0^\infty(\Omega)$上连续，所以在 $C_K^\infty(\Omega)$上连续，于是有

当 $n\to\infty$时，$<T,\ \varphi_n>\to 0$

反之，必须证明 $C_0^\infty(\Omega)$ 上的线性泛函 $T$ 是连续的．设 $K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_n\subset\cdots$ 是使得 $\Omega=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}K_j$ 成立的 Ω 的紧子集所组成的一个单调增加序列，只要证明 $T$ 在每一个子空间 $C_{K_j}^\infty(\Omega)$(

$=1, 2, \cdots$) 上是连续的．利用反证法，假设存在某一个指标 $j_0$．使得 T 在 $C_{K_{j_0}}^{\infty}(\Omega)$ 上不连续，那么就能找出 $C_{K_{j_0}}^{\infty}(\Omega)$ 的一个函数序列 $\{\varphi_n\}$，它在 $C_{K_{j_0}}^{\infty}(\Omega)$ 内收敛于 0，但数列 $\{<T,\varphi_n>\}$ 不收敛．因为嵌入 $C_{K_{j_0}}^{\infty}(\Omega)\to C_0^{\infty}(\Omega)$ 是连续的，$\{\varphi_n\}$ 必在 $C_0^{\infty}(\Omega)$ 内收敛于 0，于是 $\{<T,\varphi_n>\}$ 必收敛于 0，故得矛盾．证毕．

2° E′(Ω)广义函数

和 D(Ω)上线性连续泛函一样，可以定义 E(Ω)上线性连续泛函，记为 E′(Ω)，它是 E(Ω)的拓扑对偶．

**定义 1.4.2** E(Ω)上所有线性连续泛函的全体记为 E′(Ω)，E′(Ω)的元素也称为广义函数．

由于定理 1.3.4，$D(R^n)\subset E(R^n)$是连续嵌入的包含关系，所以 E′(Ω)中的每个元素，也必然是 D′(Ω)上的广义函数，以后将会看到 E′(Ω)中的广义函数都是 Ω 上具有列紧支集的广义函数．

E′(Ω)上的收敛也分为弱收敛和强收敛，它与 D′(Ω)相应的概念是一致的．所不同的是这里讨论的检验空间是 $C^{\infty}(\Omega)$．例如 E′(Ω)上的强收敛是在 $C^{\infty}(\Omega)$的有界集上的一致收敛．

与定理 1.4.1 类似，我们有

**定理 1.4.3** $T\in E'(\Omega)$当且仅当存在常数 $c>0$，整数 $m\geq 0$，以及一个紧集 $K\subset\Omega$，使得

$$|<T,\varphi>|\leq c\sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq m}}|\partial^{\alpha}\varphi(x)|,\quad \forall\varphi\in C^{\infty}(\Omega) \tag{1.4.2}$$

证 设 $K_1\subset K_2\subset\cdots K_n\subset\cdots$ 是使得 $\Omega=\bigcup_{l=1}^{\infty}K_l$ 成立的 Ω 的紧子集所组成的一个单调增序列．则对任一紧集 $K\subset\Omega$，必有 $N$ 存在，使得 $n>N$ 时，$K\subset K_n$．

如果 $T\in E'(\Omega)$，而 (1.4.2) 式不成立．则对任意的 $n$，必可找到 $\varphi_n\in E(\Omega)$，满足

$$|<T,\varphi_n>|>n\sup_{\substack{x\in K_n\\|\alpha|\leq n}}|\partial^\alpha\varphi_n(x)|$$

记
$$\psi_n(x)=\frac{\varphi_n(x)}{n\sup\limits_{\substack{x\in K_n\\|\alpha|\leq n}}|\partial^\alpha\varphi_n(x)|},$$

则有 $\psi_n(x)\in E(\Omega)$. 又对任一紧集 $K\subset\Omega$，当 $n$ 充分大时，$K\subset K_n$. 所以对任一 $m$，必有

$$\sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\leq m}}|\partial^\alpha\psi_n(x)|\leq\frac{\sup\limits_{\substack{x\in K\\|\alpha|\leq n}}|\partial^\alpha\varphi_n(x)|}{n\sup\limits_{\substack{x\in K_n\\|\alpha|\leq n}}|\partial^\alpha\varphi_n(x)|}\leq\frac{1}{n}\to 0\qquad(n\to\infty\text{时})$$

因此在 $E(\Omega)$ 空间中收敛的意义下，$\psi_n(x)\to 0$. 但是另一方面 $|<T,\psi_n>|>1$，这与$T\in E'(\Omega)$矛盾.

反之，若 $T$ 为 E(Ω)上线性泛函且满足(1.4.2)式，此即存在紧集 K，正整数 m，使得

$$|<T,\varphi_n>|\leq c\sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\leq m}}|\partial^\alpha\varphi_n(x)|$$

如果在 $E(\Omega)$ 中 $\varphi_n\to 0$，则上述不等式右端趋于 0，故 $|<T,\varphi_n>|\to 0$，即$T\in E'(\Omega)$.证毕.

例 8　每一个有紧支集的局部可积函数 $f$，由

$$<T_f,\varphi>=\int_\Omega f\ \varphi dx\qquad\forall\varphi\in E(\Omega)$$

定义了 E(Ω)上的一个线性连续泛函 $T_f$. 为证明其连续性，只要证明映照 $\varphi\to<T_f,\ \varphi>$在 $C^\infty(\Omega)$上连续即可.

若 K 是 Ω 的一个紧子集，又若 $L_k^1(\Omega)$表示紧支集在 K 内的所有可积函数组成的空间，则可以证明

$$L_k^1(\Omega)\subset E'(\Omega)$$

特别$C_0^m(\Omega)(m\geq 0)$都是$E'(\Omega)$的子空间.

例 9 广义函数 $\delta$ 属于 $E'(\Omega)$.

3° $S'(R^n)$缓增广义函数

如同 $D(R^n)$上的线性连续泛函一样，也可以定义急降函数空间 $S(R^n)$上的线性连续泛函.

**定义 1.4.3** $S(R^n)$上所有线性连续泛函的全体所组成的集合，记为 $S'(R^n)$，$S'(R^n)$中的元素称为缓增广义函数.

$S'(R^n)$上的收敛也分弱收敛和强收敛.和 $D'(R^n)$，$E'(R^n)$一样，$S'(R^n)$上的强收敛是在$\tilde{S}(R^n)$的有界集上的一致收敛.

$A$ 是由$\tilde{S}(R^n)$中的部分元素组成的集合.如对任意的 $\alpha$，$\beta \in Z_+^n$，存在只依赖于 $\alpha$ 和 $\beta$ 的常数 $c(\alpha, \beta)$，使得

$$|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leqslant c(\alpha,\beta) \qquad \forall \varphi \in A, x \in R^n$$

则称 $A$ 是$\tilde{S}(R^n)$中的有界集合.

我们可以给出 $S'(R^n)$中强收敛的更精确的描述：$S'(R^n)$的元素序列$\{T_j\}$强收敛于 0 当且仅当数列$\{<T_j, \varphi>\}$在$\tilde{S}(R^n)$的每一个有界集上一致收敛于 0.

**定理 1.4.4** 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，则有 $L^p(R^n) \subset S'(R^n)$

**证** 设 $f \in L^p(R^n)$，且

$$<T_f, \varphi> = \int_{R^n} f \varphi dx \qquad \forall \varphi \in \tilde{S}(R^n)$$

这里 $T_f$是由 $f$ 确定的 $S'(R^n)$中的元素，$T_f$的可加性是显然的，现在证明 $T_f$在 $S(R^n)$上的连续性.

(1) $1 < p < \infty$.设$\{\varphi_n\}$在 $S(R^n)$上收敛于 $\varphi$，对于任意一个 $t \geqslant 1$，有

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_n - \varphi\|_{0,t,R^n}^t \\
&= \int_{R^n} \left| \frac{1}{(1+|x|)^{(n+1)}} (\varphi_n - \varphi)(1+|x|)^{(n+1)} \right|^t dx \\
&\leqslant \left\{ \sup_{x \in R^n} |(1+|x|)^{(n+1)}(\varphi_n - \varphi)| \right\}^t \int_{R^n} \frac{dx}{(1+|x|)^{(n+1)t}} \quad (1.4.3)
\end{aligned}$$

注意到 $\varphi_n \in \tilde{S}(R^n)$，$\varphi_n \in \tilde{S}(R^n)$，当 $n \to \infty$时，上述不等式右端的

第一个因子趋于 0；第二个因子有界，所以

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi\|_{o,1,\mathbb{R}^n}=0$$

利用 Hoelder 不等式，有

$$|<T_f,\varphi_n>-<T_f,\varphi>|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(\varphi_n-\varphi)dx\right|$$

$$\leqslant\|f\|_{o,p,\mathbb{R}^n}\|\varphi_n-\varphi\|_{o,p',\mathbb{R}^n}$$

其中 $1/p+1/p'=1,p'\geqslant 1$.于是有

$$\lim_{n\to\infty}|<T_f,\varphi_n>-<T_f,\varphi>|=0$$

所以 $T_f\in S'(\mathbb{R}^n)$.

(2) $p=1$.因为

$$|<T_f,\varphi_n>-<T_f,\varphi>|=\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(\varphi_n-\varphi)dx\right|$$

$$\leqslant\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\varphi_n-\varphi|\int_{\mathbb{R}^n}|f|dx$$

所以 $T_f\in S'(\mathbb{R}^n)$

(3) $p=\infty$.因为

$$|<T_f,\varphi_n>-<T_f,\varphi>|\leqslant\operatorname*{ess\ sup}_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_n-\varphi|dx$$

由(1.4.3)(t=1)知上式右边积分趋于 0，因此 $T_f\in S'(\mathbb{R}^n)$.

容易证明，$L^p(\mathbb{R}^n)$中的不同元素对应着 $S'(\mathbb{R}^n)$中的不同的缓增广义函数.证毕.

如取 $f(x)=x^\alpha$，$\forall\alpha\in Z_+^n$，类似地可以证明

$$<T_f,\varphi>=\int_{\mathbb{R}^n}x^\alpha\varphi dx\qquad\forall\varphi\in\tilde{S}(\mathbb{R}^n)$$

仍是 $S(\mathbb{R}^n)$上的一个连续线性泛函.从而有

**引理 1.4.1** 每一个常系数多次式 $p(x)$确定一个缓增广义函数.

**引理 1.4.2** 设 $T\in S'(\mathbb{R}^n)$，如果 $p(x)$是一常系数多项式，则 (1) $p(x)T\in S'(\mathbb{R}^n)$； (2) 如果还有 $p(x)>0$，则 $T/p(x)\in S'(\mathbb{R}^n)$.

设 $f(x)$是一个连续函数，如果存在一个整数 $k\geqslant 0$，使得 $(1+|x|^2)^{-k/2}f(x)$在 $\mathbf{R}^n$ 内有界，或者等价地若存在一个多项式 $P(x)$，使得 $|f(x)|\leqslant|P(x)|$，$\forall x\in\mathbf{R}^n$.则称这个连续函数 $f$在无限远处是缓增的，

**定理 1.4.5** 每个在无限远处缓增的连续函数 $f$确定一个缓增广义函数.

**证** 设

$$<T_f,\varphi>=\int_{\mathbf{R}^n} f\ \varphi dx \qquad \forall\varphi\in\tilde{\mathrm{S}}(\mathbf{R}^n),$$

我们有

$$\begin{aligned}|<T_f,\varphi>|&\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)\varphi(x)|dx\\&=\int_{\mathbf{R}^n}|(1+|x|^2)^{k/2}f(x)(1+|x|^2)^{-k/2}\varphi(x)|dx\\&\leqslant c\int_{\mathbf{R}^n}|(1+|x|^2)^{k/2}\varphi(x)|dx\end{aligned}$$

注意到如果一个序列$\{\varphi_n\}$在$\tilde{\mathrm{S}}(\mathbf{R}^n)$内收敛于 0，则对每个 $k\geqslant 0$，$\{(1+|x|^2)^{k/2}\varphi_n\}$在 $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$内收敛于 0，由此证得 $T_f$的连续性，故 $T_f\in\mathrm{S}'(\mathbf{R}^n)$.证毕.

**定理 1.4.6** 广义函数空间 $\mathrm{D}'(\mathbf{R}^n)$, $\mathrm{S}'(\mathbf{R}^n)$，$\mathrm{E}'(\mathbf{R}^n)$之间存在下述的(在强收敛意义下)连续嵌入的包含关系：

$$\mathrm{E}'(\mathbf{R}^n)\subset\mathrm{S}'(\mathbf{R}^n)\subset\mathrm{D}'(\mathbf{R}^n)$$

**证** 设 $T\in\mathrm{S}'(\mathbf{R}^n)$，即 $T$是 $\mathrm{S}(\mathbf{R}^n)$上的线性连续泛函.由定理 1.3.4 有 $\mathrm{D}(\mathbf{R}^n)\subset\mathrm{S}(\mathbf{R}^n)$，因此，对于 $\psi\in\mathrm{D}(\mathbf{R}^n)$，$<T,\psi>$有意义.又 $\mathrm{D}(\mathbf{R}^n)$的拓扑比 $\mathrm{S}(\mathbf{R}^n)$的拓扑强，所以 $T$也是 $\mathrm{D}(\mathbf{R}^n)$上的线性连续泛函，即 $T\in\mathrm{D}'(\mathbf{R}^n)$.此外 $\mathrm{S}'(\mathbf{R}^n)$中不同的元素，对应于 $\mathrm{D}'(\mathbf{R}^n)$的不同的元素，即不可能有 $\mathrm{S}'(\mathbf{R}^n)$中的非零元素对应于 $\mathrm{D}'(\mathbf{R}^n)$的零元素.若不然，设非零元素 $T\in S'(\mathbf{R}^n)$，使得 $\forall\psi\in\mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$有 $<T,\psi>=0$，由定理 1.3.3 知 $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$在$\tilde{\mathrm{S}}(\mathbf{R}^n)$中稠密，故$<T,\psi>=0$ $\forall\psi\in\tilde{\mathrm{S}}(\mathbf{R}^n)$.从而 $T$也是 $\mathrm{S}'(\mathbf{R}^n)$中的零元素.由此得出矛盾.$\mathrm{D}'(\mathbf{R}^n)$，$\mathrm{S}'(\mathbf{R}^n)$为向量空间，所以 $\mathrm{S}'(\mathbf{R}^n)$一一对

应于 $D'(R^n)$中一个子集，有 $S'(R^n)\subset D'(R^n)$.同理可证 $E'(R^n)\subset S'(R^n)$.证毕.

这个定理中的嵌入 $E'(R^n)\subset S'(R^n)$说明 $E'(R^n)$中的元素是一个缓增广义函数，而后面可以证明 $E'(R^n)$中的元素是有紧支集的广义函数，这个嵌入说明所有具有紧支集的广义函数组成了 $S'(R^n)$的一个子空间.

4° 广义函数的支集

**定义 1.4.4** 设 V 是 Ω 的一个开子集，$T\in D'(\Omega)$.若 $<T,\psi>=0$, $\forall\psi\in C_0^\infty(V)$，则称广义函数 T 在 V 上是零.

例 10 设 Ω＝R，考察 Heaviside 函数

$$H(x)=\begin{cases}1 & 若x\geq 0\\ 0 & 若x<0\end{cases}$$

因为 H(x)是局部可积函数，所以由

$$<T_H,\psi>=\int_0^\infty\psi(x)dx \qquad \forall\psi\in C_0^\infty(R)$$

定义 R 上一个广义函数 $T_H$.容易验证 $T_H$ 在区间$(-\infty, 0)$上是零.更一般地，若函数 $f$ 在某个开集内是零，则由它所确定的广义函数在同一开集内也是零.

例 11 $\delta$ 函数在 $R^n\setminus\{0\}$上都等于零.

**定义 1.4.5** 我们称两个广义函数 $S$，$T\in D'(\Omega)$在 Ω 的某个开子集 $V$ 上是相等的，如果 $S-T$ 在 $V$ 上等于零，记为 $S=T$.

**引理 1.4.3** 设 $K$ 是 $R^n$ 中的紧子集，又设$\{O_j\}(1\leq j\leq k)$是 K 的有限开覆盖，则存在函数 $\varphi_j\in C_0^\infty(R^n)$，使得 $0\leq\varphi_j\leq 1$，$1\leq j\leq k$，并且在 K 的一个邻域内有

$$\sum_{j=1}^k\varphi_j=1$$

**证** 我们能够找出紧集$\{K_j\}(1\leq j\leq k)$使得$K_j\subset O_j$以及

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{k} \mathring{K}_j$$

这里$\mathring{K}_j$ 表示 $K_j$ 的内部．对每一个 $j$，令 $\Psi_j \in C_0^\infty(O_j)$，使得 $0 \leqslant \Psi_j \leqslant 1$ 以及在 $K_j$ 上 $\Psi_j = 1$. 取

$$\varphi_1 = \Psi_1, \quad \varphi_j = \Psi_j(1-\Psi_1)\cdots(1-\Psi_{j-1}), \ j=2,\cdots,k,$$

易知函数$\{\varphi_j\}(1 \leqslant j \leqslant k)$ 满足所要求的性质.证毕.

称函数集合 $\{\varphi_j\}(1 \leqslant j \leqslant k)$ 是从属于 $K$ 的覆盖 $\{O_j\}$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$的单位$C^\infty$分解.

引理 1.4.4　设$\{V_i\}(i \in Z_+)$是 $\Omega$ 的一族开子集，又设 $T \in D'(\Omega)$在每个 $V_i$ 上为 0，则 $T$ 在和集

$$V = \bigcup_i V_i$$

上为 0.

**证**　设 $\varphi \in C_0^\infty(V)$，并记 $K$ 是 $\varphi$ 的支集．因为 $\{V_i\}(i \in Z_+)$ 是紧子集 $K$ 的一个开覆盖，所以能选取有限个 $V_i\,(i=1,\cdots,i_r)$ 覆盖 $K$ 且可构造从属这一覆盖的单位 $C^\infty$ 分解 $\{\Psi_j\}(1 \leqslant j \leqslant i_r)$:

$$\Psi_j \in C_0^\infty(V_{i_j}),\ 0 \leqslant \Psi_j \leqslant 1,\ \sum_{j=1}^{i_r} \Psi_j = 1$$

于是

$$\varphi = \sum_{j=1}^{i_r} \varphi \Psi_j$$

因为$\varphi\Psi_j \in C_0^\infty(V_{i_j})$以及$T$在$V_{i_j}$上为0，所以

$$T(\varphi) = \sum_{j=1}^{i_r} T(\varphi\Psi_j) = 0$$

又由 $\varphi$ 的任意性，有 $T$ 在 $V$ 上为 0.证毕.

**定义 1.4.6**　广义函数 $T \in D'(\Omega)$.它的支集 suppT 是 $\Omega$ 内 T

为 0 的最大开子集在 $\Omega$ 内的余集.

等价地，一个点属于 $T$ 的支集，当且仅当不存在该点的开邻域，使得 $T$ 在此开邻域上为 0.换言之，$T$ 的支集是 $\Omega$ 的最小的闭子集，在这个闭子集之外广义函数 $T$ 为 0.

容易证明下述结论：

(1) 若 $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$，$T\in D'(\Omega)$，并且 $\operatorname{supp}\psi\cap\operatorname{supp}T=0$，则 $<T,\psi>=0$;

(2) 若 $T\in D'(\Omega)$.$T$ 的支集是 $\Omega$ 的最小闭子集 F，使得若 $\varphi$，$\psi\in C_0^\infty(\Omega)$，并且在 F 的某个邻域上 $\varphi=\psi$，则

$$<T,\ \varphi> = <T,\ \psi>$$

下面的定理建立了两个广义函数空间 $E'(\Omega)$和 $D'(\Omega)$之间的关系.

**定理 1.4.7** 设 $\Omega$ 是 $R^n$ 内的开集，我们有：(1) $E'(\Omega)\subset D'(\Omega)$，并且恒等映射关于强拓扑是连续的；

(2) $E'(\Omega)$的元素是在 $\Omega$ 内有紧支集的广义函数，反之亦然.

**证** 在定理 1.4.6 中，已经证明 $E'(R^n)\subset D'(R^n)$，用同样的方法可以证明 $E'(\Omega)\subset D'(\Omega)$.

由定理 1.3.4 知存在着连续嵌入的包含关系：$D(\Omega)\subset E(\Omega)$.于是 $D(\Omega)$内每个有界集是 $E(\Omega)$的有界集，故 $E'(\Omega)$到 $D'(\Omega)$内的恒等映照是连续的.

最后，我们还要证明，若 $T\in E'(\Omega)$，则 $T$ 在 $\Omega$ 内有紧支集.由定理 1.4.3 知存在常数 $c$，正整数 $m$ 和一个紧集 $K\subset\Omega$，使得

$$|<T,\psi>|\leqslant c\sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\leqslant m}}|\partial^\alpha\psi(x)|\quad \forall\psi\in C^\infty(\Omega)$$

因而，只要 $\psi$ 的支集落在 $\Omega\setminus K$ 中，上式右端为 0，故有 $<T,\psi>=0$，这说明 $T$ 在 $\Omega\setminus K$ 内恒为 0，从而有 $\operatorname{supp}T\subset K$.

反之，若 $\operatorname{supp}T=K$，则作 $\Omega_1$，使 $K\subset\subset\Omega_1\subset\subset\Omega$，并作 $h(x)\in D(\Omega_1)$，使得 $h(x)\equiv 1$，$\forall x\in K$.由于 $T$ 为广义函数，由定理 1.4.1 知，对于紧集 $\Omega_1$，有常数 $c$ 及 $m$ 使

$$|<T,\psi>|\leqslant c\sup_{\substack{x\in\Omega_1\\|\alpha|\leqslant m}}|\partial^\alpha\psi(x)|$$

对于一切满足条件 supp $\psi\subset\Omega_1$ 的 D(Ω)中的函数成立.对于一般的 $\psi\in C^\infty(\Omega)$，把它记为 $\psi=h\psi+(1-h)\psi$，由于$(1-h)\psi$ 的支集含于 $\Omega\setminus K$ 中，故 $<T,(1-h)\psi>=0$，从而

$$|<T,\psi>|=|<T,h\psi>|\leqslant c\sup_{\substack{x\in\Omega_1\\|\alpha|\leqslant m}}|\partial^\alpha(h\psi)|$$

$$\leqslant c_1\sup_{\substack{x\in\Omega_1\\|\alpha|\leqslant m}}|\partial^\alpha\psi(x)|$$

因此，由定理 1.4.3 知，$T\in E'(\Omega)$.证毕.

**例 12** $\delta$ 函数有等于{0}的紧支集.

## §1.5 广义函数的导数

设 $T\in D'(\Omega)$，$\psi\in D(\Omega)$，则 $\partial^\alpha\psi\in D(\Omega)$，且 $<T,\ \partial^\alpha\psi>$ 是有意义的，于是我们可以定义广义函数的导数.

**定义 1.5.1** 对于广义函数 $T\in D'(\Omega)$，$\alpha\in Z_+^n$，则它的偏导数 $\partial^\alpha T$ 是由下式

$$<\partial^\alpha T,\psi>=(-1)^{|\alpha|}<T,\partial^\alpha\psi>\qquad\forall\psi\in C_0^\infty(\Omega)$$

定义的.

下面说明这一定义的合理性.设 $f\in C^1(\Omega)$，则 $f$ 和它所有的偏导数 $\partial_k f$ 确定 Ω 上的广义函数.实际上

$$<\frac{\partial}{\partial x_k}T_f,\psi>=-<T_f,\frac{\partial\psi}{\partial x_k}>=-\int_\Omega f(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_k}dx$$

$$=\int_\Omega\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\psi(x)dx=<T_{\partial_k f},\psi>\qquad\forall\psi\in C_0^\infty(\Omega)$$

说明当 $f$ 是可微函数时，它的广义函数的导数和其古典导数是一致的.类似地有，如果广义函数 $T_f$ 是由 Ω 上的 $C^m(\Omega)$函数 $f$ 所确

定，则在广义函数意义下 $f$ 的 $|\alpha|(\leqslant m)$ 阶导数与古典意义下对应的 $f$ 的导数是一致的.

我们给出广义函数导数的一些重要性质:

(1) 广义函数的导数是一个在 $D'(\Omega)$ 上处处有定义的算子;

(2) 每一个广义函数有任意阶的导数;

(3) 对每个 $T\in D'(\Omega)$，有

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_j}=\frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k} \qquad 1\leqslant j,\ k\leqslant n$$

这一结果表明，我们可以交换广义函数的求导次序.但对函数的古典导数，这一结果一般是不成立的.

(4) 映射 $\partial_k$: $D'(\Omega)\to D'(\Omega)$，$1\leqslant k\leqslant n$，在强拓扑的意义下是一个连续线性算子.

例 13 上面已经指出，每个 $C^1(\Omega)$ 的函数确定 $\Omega$ 上的一个广义函数，它在古典意义下的一阶偏导数，与在广义函数意义下相应的偏导数是一致的.

例 14 设 $\Omega=\mathbf{R}$，Heaviside 函数 $H(x)$ 定义为

$$H(x)=\begin{cases}1 & 若 x\geqslant 0\\ 0 & 若 x<0\end{cases}$$

在广义函数意义下，有

$$<\frac{dT_H}{dx},\psi>=-<H,\frac{d\psi}{dx}>=-\int_0^\infty \frac{d\psi}{dx}dx=$$
$$\psi(0)=<\delta,\psi> \qquad \forall\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$$

即 $\dfrac{d}{dx}T_H=T_\delta$.

Heaviside 函数 $H(x)$ 在原点是不连续的，在这个不连续点上的"跳跃度"等于 1，于是可以说，它在广义函数意义下的导数是 $\delta$ 函数与它在原点的"跳跃度"的乘积.

例 15 设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}$ 内的一个开区间 $(\alpha,\ \beta)$，点 $a\in\Omega$，$f\in C^1(\Omega\setminus\{a\})$，若极限

$$\lim_{x\to a-} f(x) = f(a-0), \lim_{x\to a+} f(x) = f(a+0)$$

存在并且有限，记 $Jf(a)=f(a+0)-f(a-0)$.如果函数 $f$ 在 $a$ 点有一个第一类(或简单)不连续点，$Jf(a)$就是 $f$ 在 $a$ 点的"跳跃度".又设 $f$ 的古典导数$[f']$是 $\Omega\setminus\{a\}$内的有界函数.那么，$f$ 和$[f']$都确定 $\Omega$ 上的广义函数 $T_f$ 和$T_{[f']}$所以

$$<\frac{d}{dx}T_f,\psi> = -<T_f,\frac{d\psi}{dx}> = -\int_\alpha^a f\,\psi'dx -$$

$$-\int_a^\beta f\,\psi'dx \qquad \forall\psi\in C_0^\infty(\Omega)$$

利用分部积分，得

$$<\frac{d}{dx}T_f,\psi> = [f(a+0)-f(a-0)]\,\psi(a)+\int_\alpha^\beta [f']\psi dx$$

或

$$<\frac{d}{dx}T_f,\psi> = <Jf(a)\delta_{(a)},\psi> + <T_{[f']},\psi>,$$

这里$\delta_{(a)}$定义为 $<\delta_{(a)},\psi(x)> = \psi(a)$.从而

$$\frac{d}{dx}T_f = T_{[f']} + Jf(a)\delta_{(a)}$$

这表明在广义函数意义下，$\frac{d}{dx}T_f$ 等于古典导数的 $T_{[f']}$ 与质量 $Jf(a)$ 集中在 $a$ 点的测度之和 .

**例 16** 设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个开子集，它的边界 $\partial\Omega$ 是光滑曲线.设 $f(x,y)$是 $\Omega\bigcup\partial\Omega$ 上的 $C^1$ 类函数，并且在$(\Omega\bigcup\partial\Omega)^c$ 上为 0，于是 $f$ 及其偏导数在 $\partial\Omega$ 上有第一类(或简单)不连续点.则由广义函数 $T_f$ 的导数的定义有

$$<\frac{\partial}{\partial x}T_f,\psi> = -\iint_\Omega f(x,y)\psi'_x(x,y)dxdy \quad \forall\psi\in C_0^\infty(\Omega)$$

利用 Green 公式

$$< \frac{\partial}{\partial x} T_f, \psi > = \iint_\Omega f_x(x,y)\psi(x,y)dxdy - \int_{\partial\Omega} f(x,y)\psi(x,y)\cos\alpha dl$$

这里 $\alpha$ 是 $\partial\Omega$ 的外法向与 $x$ 轴夹角.所以我们有

$$\frac{\partial}{\partial x} T_f = T_{f_x} + T_l,$$

其中 $< T_l, \psi > = \int_{\partial\Omega} f(x,y)\psi(x,y)\cos\alpha dl$，$T_l$ 可以解释为支集是 $\partial\Omega$ 并且密度是 $f(x, y)\cos\alpha$ 的 $\mathbf{R}^2$ 上的测度．这就是说，$f$ 在广义函数意义下的导数等于古典导数 $f'$ 加上一个集中在边界上的测度．对于 $n$ 维空间有

**引理 1.5.1** 如果 $f(x) \in C_0^2(\Omega)$，$\Omega \subset \mathbf{R}^n$，则由 Green 公式得

$$< \triangle T_f, \psi > = < T_{\triangle f}, \psi > + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu} \psi(x) dl - \int_{\partial\Omega} f(x) \frac{\partial \psi}{\partial \nu} dl$$

其中$\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cos(\gamma, x_i)$，$\triangle$是Laplace算子.

**定义 1.5.2** 设 $P = P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha$ 是 $\mathbf{R}^n$ 内常系数线性算子，如果一个广义函数 $G \in \mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$ 满足 $P(\partial)G = T_\delta$，则称 $G$ 是线性微分算子 $P$ 的基本解．

若

$$P^* = P^*(\partial) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha$$

是算子 $P$ 的转置算子，则 $G \in D'(\mathbf{R}^n)$是基本解当且仅当

$$< G, P^*(\partial)\psi > = \psi(0) \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$$

例 17　定义 $\mathbf{R}^n$ 内 Heaviside 函数如下:

$$H(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}1 & \text{若} x_1\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0,\\ 0 & \text{其它情形.}\end{cases}$$

则$H(x_1,\cdots,x_n)$是偏微分方程

$$\frac{\partial^n T_H}{\partial x_1\cdots\partial x_n}=T_\delta$$

的一个解.不失普遍性，令 $n=2$ 来验证它.按定义

$$<\frac{\partial^2 T_H}{\partial x_1\partial x_2},\psi> = <T_H,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}> \qquad \forall\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^2),$$

另一方面

$$<T_H,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}> = \int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2=\psi(0,0)= <\delta,\psi>$$

于是

$$\frac{\partial^2 T_H}{\partial x_1\partial x_2}=T_\delta$$

在例 14 和 17 中定义的 Heaviside 函数分别是算子 $d/dx$ 和 $\partial^n/\partial x_1\cdots\partial x_n$ 的基本解.

**定义 1.5.3**　如果 $T\in D'(\Omega)$，$f\in C^\infty(\Omega)$，则函数 $f$ 和广义函数 $T$ 的乘积 $S$ 定义为

$$<S,\ \psi> = <T,\ f\psi> \qquad \forall\psi\in D(\Omega)$$

注意到 $f\in C^\infty(\Omega)$，$\psi\in D(\Omega)$有 $f\psi\in D(\Omega)$，由 Leibniz 公式，易知 $S\in D'(\Omega)$.

对于上述定义中的 $f$ 和 $T$，$S=fT$，有

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f\ T)=\frac{\partial f}{\partial x_j}T+f\frac{\partial T}{\partial x_j}$$

只须对$\frac{\partial(f\ \psi)}{\partial x_j}$运用Leibniz公式，就有

$$-T\left(f\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)=T\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\psi\right)-T\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(f\ \psi)\right)$$

从而得出对 $S$ 的求导公式.

应该指出，两个局部可积函数的乘积未必局部可积，因此两个广义函数一般不能相乘.

## §1.6 广义函数的阶和局部结构

考察 $C_0^m(\Omega)$空间，其中元素范数定义为

$$\|\psi\|_{m,\Omega}=\sup_{\substack{x\in\Omega\\|\alpha|\leqslant m}}|\partial^\alpha\psi|$$

则有 $C_0^\infty(\Omega)\subset C_0^m(\Omega)\subset D'(\Omega)$，并且 $C_0^\infty(\Omega)$在 $C_0^m(\Omega)$内稠密以及 $C_0^\infty(\Omega)$到 $C_0^m(\Omega)$的嵌入是连续的.和定理 1.4.6 的证明一样，可以证明存在包含关系

$$C_0^\infty(\Omega)\subset C_0^m(\Omega)\subset(C_0^m(\Omega))'\subset D'(\Omega)$$

为了简单起见，记 $D'^m(\Omega)=(C_0^m(\Omega))'$，$D^m(\Omega)=C_0^m(\Omega)$.

又 $D^{m+1}(\Omega)\subset D^m(\Omega)$，并且 $D^{m+1}(\Omega)$在 $D^m(\Omega)$内稠密，则 $(D^m(\Omega))'\subset(D^{m+1}(\Omega))'$，即 $D'^m(\Omega)\subset D'^{m+1}(\Omega)$.

定义 1.6.1 一个广义函数 $T\in D'(\Omega)$，如果 $T\in D'^m(\Omega)$，则称它的阶$\leqslant m$.称 $T$ 有阶 $m$ 是指：使得 $T\in D'^m(\Omega)$成立的最小正整数 m.

由定义可知 $\delta$ 函数是一个零阶广义函数，若$|\alpha|=m$，$\alpha\in Z_+^n$，则 $\partial^\alpha\delta$ 是一个 $m$ 阶广义函数.

我们已经知道，每个广义函数有任意阶的导数.我们可以对由局部可积函数定义的广义函数进行微分运算.在下面的定理中，将证明每一个广义函数局部地是一个有界函数的导数.

定理 1.6.1 设 $T\in D'(\Omega)$，$\omega$ 是一开集，$K=\bar{\omega}\subset\Omega$ 是紧集，则存在一个函数 $f\in L^\infty(\omega)$ 和一个整数 $m\geqslant 0$，使得

$$<T,\varphi>=\int_K\frac{\partial^{mn}f}{\partial x_1^m\cdots\partial x_n^m}\varphi(x)dx\qquad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

**证** 由定理 1.4.1 有常数 $c>0$ 和正整数 $m$，使得

$$|<T,\varphi>| \leqslant c\sup_{\substack{x\in\Omega\\|\alpha|\leqslant m}}|\partial^{\alpha}\varphi(x)| \qquad \forall\varphi\in C_K^{\infty}(\Omega) \tag{1.6.1}$$

为了简化符号，记$\partial^{m}/\partial x^{m}$为偏导数

$$\partial^{mn}/\partial x_1^{m}\cdots\partial x_n^{m}$$

其中 $m$ 是非负整数.定义子空间

$$\hat{E}=\{\ \psi:\ \psi=\frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial x^{k+1}} \qquad \forall\varphi\in C_K^{\infty}(\Omega)\ \} \tag{1.6.2}$$

因为这些函数有紧支集，所以$\hat{E}$中给出的 $\psi$ 和 $\varphi$ 之间的对应是一对一的.

设 $L^1(K)$是 K 上所有可积函数组成的 Banach 空间，则$\hat{E}\subset L^1(K)$.在$\hat{E}$上定义线性泛函

$$l(\psi)=<T,\varphi>$$

其中 $\psi$ 和 $\varphi$ 由 (1.6.2.) 式联系 . 下面证明 $l$ 在$\hat{E}$ 上是连续的，即若序列 $\psi_j=\dfrac{\partial^{k+1}\varphi_j}{\partial x^{k+1}}$ 在 $L^1(K)$ 内收敛于零，则数列 $<T,\varphi_j>$ 收敛于零 . 事实上，设 $Q$ 是边长 $d\geqslant 1$ 并且含有 $K$ 的超立方体 . 对任意 $\eta>0$，存在正整数 $j_0$，使得对一切 $j>j_0$，有

$$\int\cdots\int_K\left|\frac{\partial^{k+1}\varphi_j}{\partial x^{k+1}}\right|dx_1\cdots dx_n\leqslant\frac{\eta}{d^{(k+1)n}} \tag{1.6.3}$$

而

$$\frac{\partial^k\varphi_j}{\partial x^k}(x)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\frac{\partial^{k+1}\varphi_j}{\partial t^{k+1}}dt_1\cdots dt_n \tag{1.6.4}$$

因为 $d\geqslant 1$，故由(1.6.3)易知

$$\left|\frac{\partial^k\varphi_j}{\partial x^k}\right|\leqslant\frac{\eta}{d^{kn}} \tag{1.6.5}$$

重复利用(1.6.4)，由不等式(1.6.5)容易得出

$$|\partial^{\alpha}\varphi_j(x)|\leqslant\eta, \qquad \forall x\in K,\ \ \forall|\alpha|\leqslant k,\ \ \forall j\geqslant j_0$$

这就证明了对所有$j\geqslant j_0$， $\forall x\in K$，$|\alpha|\leqslant k$ 有

$$|<T,\varphi_i>|<c\eta$$

则 $l\in\hat{E}$.

因为 $\hat{E}$ 显然是 $\mathbf{L}^1(K)$ 的一个真线性子空间，根据 Hahn-Banach 定理，线性泛函 $l$ 能够延拓为 $\mathbf{L}^1(K)$ 上的一个连续线性泛函 $\tilde{l}$. 再由 $\mathbf{L}^1(K)$ 上连续线性泛函表示定理知存在一个元素 $g\in\mathbf{L}^\infty(K)$，使得

$$\tilde{l}(\psi)=\int\cdots_K\int g\psi dx \qquad \forall\psi\in\hat{E}$$

于是对每个 $\varphi\in\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$，甚至对每个 $\varphi\in\mathbf{C}_0^\infty(\omega)$，有

$$<T,\ \varphi>=l(\varphi)=\int\cdots_K\int g\frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial x^{k+1}}dx_1\cdots dx_n$$

$$=<(-1)^{(k+1)n}\frac{\partial^{k+1}g}{\partial x^{k+1}},\ \varphi>$$

如设 $m=k+1, f=(-1)^{mn}g$,于是在 $\omega$ 上有

$$T=\frac{\partial^m f}{\partial x^m}$$

证毕.

设 supp $f\subset K$ 并定义

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(t_1,\cdots,t_n)dt_1,\cdots,dt_n$$

显然，$F$ 是连续函数，并且 $\partial^n F/\partial x_1\cdots\partial x_n=f$. 作适当的替换，在 $\omega$ 上有

$$T=\frac{\partial^{m+1}F}{\partial x^{m+1}}$$

于是，广义函数 $T$ 能够局部地表示为一个连续函数的导数.

设 $\mathbf{U}$ 是 $K=\bar{\omega}$ 的一个开邻域，并且 $\mathbf{U}\subset\Omega$. 又设 $\alpha\in\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$，并且在 $K$ 上 $\alpha=1$. 令 $G=\alpha F$，显然在 $\omega$ 上

$$T=\frac{\partial^{m+1}G}{\partial x^{m+1}}$$

这里 $G\in C_0(U)$.

因此，可以把上述讨论概括为

**定理1.6.2** 设$T\in D'(\Omega)$，$\omega$是一开集，其闭包$\bar{\omega}$是紧集且$\bar{\omega}\subset\Omega$. 则广义函数 $T$ 在 $\omega$ 上，等于一个有紧支集的连续函数 $f$ 的导数，而这个连续函数的紧支集是在$\bar{\omega}$ 的任意开邻域内．

**注** (1) 定理 1.6.1 和 1.6.2 都是局部的性质.若 $\Omega$ 是一个开集但$\bar{\Omega}$不是紧集，则一般说来，$\Omega$ 上的广义函数未必可以表示为一个函数的导数.

(2) 在这两个定理中，$f$ 不是唯一的.事实上，可以把 $\frac{\partial^m h}{\partial x^m}=0$的任何一个解加到 $f$ 上去.

然而对于有紧支集的广义函数，能够给出在 $\Omega$ 内的一个整体表示.

**定理 1.6.3** 每个广义函数 $T\in E'(\Omega)$在 $\Omega$ 上可以表示为(但非唯一的)

$$T=\sum_{|\beta|\leq\gamma}\partial^\beta f_\beta$$

其中 $f_\beta$ 都是具有紧支集的连续函数，它们的紧支集是在 supp $T=K$ 的某个任意的邻域内.

**证** 设$\omega$是一开集且$\bar{\omega}$是紧集，使得

$$K\subset\omega\subset\bar{\omega}\subset U\subset\Omega$$

由定理 1.6.2 知，存在一个连续函数 $f$, supp $f\subset U$，使得在 $\omega$ 上

$$T=\partial^\gamma f,\quad \gamma\in Z_+^n$$

即

$$<T,\varphi>=(-1)^{|\gamma|}\int\cdots\int_\Omega f\,\partial^\gamma\varphi dx,\qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(\omega)$$

设 $\alpha\in C_0^\infty(\omega)$，在 $K$ 的一个邻域内 $\alpha=1$，那么，对每个 $\varphi\in C^\infty(\omega)$，有

$$< T,\varphi > = < T,\alpha\varphi > = (-1)^{|\gamma|}\int\cdots\int_{\Omega} f\,\partial^{\gamma}(\alpha\varphi)dx$$

根据 Leibniz 公式，有

$$\partial^{\gamma}(\alpha\varphi) = \sum_{\beta\leqslant\gamma}\frac{\gamma!}{\beta!(\gamma-\beta)!}\partial^{\gamma-\beta}\alpha\ \partial^{\beta}\varphi$$

所以

$$< T,\varphi > = (-1)^{|\gamma|}\sum_{\beta\leqslant\gamma}\frac{\gamma!}{\beta!(\gamma-\beta)!}\int\cdots\int_{\Omega} f\,\partial^{\gamma-\beta}\alpha\ \partial^{\beta}\varphi dx$$

令 $$f_{\beta} = (-1)^{|\gamma|+|\beta|}\frac{\gamma!}{\beta!(\gamma-\beta)!}f\,\partial^{\gamma-\beta}\alpha$$

作分部积分，则$\forall\varphi\in C^{\infty}(\Omega)$有

$$< T,\varphi > = \int\cdots\int_{\Omega}\left[\sum_{\beta\leqslant\gamma}\partial^{\beta}f_{\beta}\right]\varphi dx$$

证毕.

**推论 1.6.1** 每个有紧支集的广义函数是有限阶的.

**证** 若 $T=\partial^{\beta}f$, 这里 $f$是 $R^n$ 内的局部可积函数，由此确定了 $C_0^{|\beta|}(R^n)$上的一个连续线性泛函，所以 $T$ 是有限阶的.证毕.

虽然定理 1.6.2 和 1.6.3 都指出，广义函数可以通过连续函数的导数来表示.但它们的差别在于，定理 1.6.3 中指出，$E'(\Omega)$的广义函数在所考虑的整个区域上可以表示为一个连续函数的导数，而 $D'(\Omega)$的广义函数只能在所考虑区域的某一个紧集上表示成一个连续函数的导数.

由广义函数支集的定义可知，若 $\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$, 并且它在 $T\in D'(\Omega)$的支集的某个邻域上为 0，则$< T,\varphi > =0$.现在我们证明当 $T$ 有紧支集时，这一结果可以大大改善.

**定理 1.6.4** 设 $T\in D'(\Omega)$且 $\text{supp}T=K\subset\Omega$, 并设它的阶$\leqslant m$, 则$\forall\varphi\in\Phi=\{\varphi\in C^{\infty}(\Omega):\ \partial^{\alpha}\varphi=0\ \ \forall\ x\in K,\ |\alpha|\leqslant m,\ \alpha\in Z_+^n\}$, 有$< T,\varphi > =0$.

**证** (1) 设 $K_{\varepsilon}$是 K 的邻域，由假设，当$|\alpha|\leqslant m$ 时，

$\partial^\alpha\varphi=0 \quad \forall x\in K$.所以对任意给定 $\eta>0$，能找到充分小的 $\varepsilon>0$，使得 $K_\varepsilon\subset\Omega$，并且

$$|\partial^\alpha\varphi(x)|\leqslant\eta, \quad \forall x\in K_\varepsilon$$

对每个 $x\in K_\varepsilon$，设有 $x_0\in K$ 使得 $x_0$ 与 $x$ 之间距离至多是 $\varepsilon$，则若 $|\alpha|=m-1$，有(注意 $\partial^\alpha\varphi(x_0)=0$)

$$\partial^\alpha\varphi(x)=\int_0^1\sum_{j=1}^n\partial_j\partial^\alpha\varphi(x_0+t(x-x_0))(x_j-x_{0j})dt$$

因此 $\quad |\partial^\alpha\varphi(x)|\leqslant(\varepsilon\sqrt{n})\eta$.再由归纳法，有

$$|\partial^\alpha\varphi(x)|\leqslant(\varepsilon\sqrt{n})^{m-|\alpha|}\eta \qquad \forall|\alpha|\leqslant m \tag{1.6.6}$$

(2) 和 § 1.3 中例 4 证明类似，可以找到一个函数 $\alpha_\varepsilon$ 具有如下性质：$\alpha_\varepsilon\in C_0^\infty(\Omega)$，$\mathrm{supp}\alpha_\varepsilon\subset K_\varepsilon$，在 $K_{\varepsilon/4}$ 上，$\alpha_\varepsilon=1$，并且

$$|\partial^\beta\alpha_\varepsilon(x)|\leqslant c(\beta,n)\varepsilon^{-|\beta|} \quad \forall x, \quad \forall\beta\in Z_+^n$$

选取充分大的 $c>0$，可得

$$|\partial^\beta\alpha_\varepsilon(x)|\leqslant c\varepsilon^{-|\beta|},\forall x,\forall|\beta|\leqslant m \tag{1.6.7}$$

(3) 设 $\psi_\varepsilon=\alpha_\varepsilon\varphi$，由Leibniz公式有

$$\partial^\gamma\psi_\varepsilon=\sum_{\beta\leqslant\gamma}\frac{\gamma!}{\beta!(\gamma-\beta)!}\partial^{\gamma-\beta}\alpha_\varepsilon\partial^\beta\varphi$$

把不等式(1.6.6)和(1.6.7)代入上式，使得估计式

$$|\partial^\gamma\psi_\varepsilon(x)|\leqslant c\ \ \varepsilon^{-|\gamma|+|\beta|}(\varepsilon\sqrt{n})^{m-|\beta|}\eta\leqslant c\eta \tag{1.6.8}$$

对所有 $x$ 和所有 $|\gamma|\leqslant m$ 成立，其中 $c$ 是一个适当的常数，它与 $m$ 和 $n$ 有关，而与 $\gamma$ 无关.

(4) 因为在 $T$ 的支集 $K$ 的某个邻域上 $\psi_\varepsilon=\varphi$，所以

$$<T,\psi_\varepsilon>=<T,\varphi> \tag{1.6.9}$$

另一方面，因为 $T\in D'^m(\Omega)$，由定理 1.4.1，存在一个常数 $c_1>0$ 使得

$$|<T,\chi>|\leqslant c_1\sup_{\substack{x\in\Omega\\|\alpha|\leqslant m}}|\partial^\alpha\chi|, \quad \forall\chi\in C_0^\infty(\Omega)$$

用$\psi_\varepsilon$代替$\chi$，利用(1.6.8)和(1.6.9)，有

$$|<T, \varphi>| \leqslant c_1 c\eta$$

由于$\eta$的任意性，$<T, \varphi> = 0$.证毕.

**定理 1.6.5** 每一个支集在原点的广义函数$T$都可以唯一地表示为$\delta$函数及其导数的有限线性组合.

**证** 因为$\operatorname{supp} T = \{0\}$，由推论 1.6.1 知$T$是有限阶的广义函数，即存在$m \in \mathbb{Z}_+$，使得$T \in D'^m$.

又对每个$\varphi \in C^\infty$，在原点对它作 Taylor 展开，则有

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha + R_m(x)$$

其中$R_m(x) \in C^\infty$，并且对所有$|\alpha| \leqslant m$，有$\partial^\alpha R_m(0) = 0$，再由定理 1.6.4 得

$$<T, \varphi> = <T, \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0) x^\alpha> + <T, R_m(x)>$$

$$= \sum_{|\alpha| \leqslant m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0) <T, x^\alpha>$$

令 $c_\alpha = (-1)^{|\alpha|} <T, x^\alpha> / \alpha!$，则有

$$<T, \varphi> = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha <\partial^\alpha \delta, \varphi>, \quad \text{或} \quad T = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \partial^\alpha \delta$$

这一分解是唯一的，因为若$T = 0$，则$<T, x^\alpha> = 0$，从而$c_\alpha = 0$，$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.证毕.

缓增广义函数具有和$E'(\mathbb{R}^n)$相似的结构，可以证明

**定理 1.6.6** 广义函数$T \in S'(\mathbb{R}^n)$的充要条件是 T 能够表示为一个有限和.

$$T = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \partial^\alpha f_\alpha$$

其中$f_\alpha$都是在无限远处缓增的连续函数.

## §1.7 广义函数的卷积

**定义 1.7.1** 设 $f$，$g\in L^2(\mathbf{R}^n)$,则 $f$ 与 $g$ 的卷积$(f*g)(x)$定义为

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbf{R}^n}f(x-y)g(y)dy$$
$$=\int_{\mathbf{R}^n}f(y)g(x-y)dy=(g*f)(x)$$

**定义 1.7.2** 设 $T\in\mathbf{D}'(\mathbf{R}^n),\psi\in\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$(或 $T\in\mathbf{E}'(\mathbf{R}^n),\psi\in\mathbf{E}(\mathbf{R}^n)$),则 $T$ 与 $\psi$ 的卷积$(T*\psi)$定义为

$$(T*\psi)(x)=\langle T_y,\psi(x-y)\rangle$$

这里 $T_y$ 表示 $T$ 是关于 $y$ 的广义函数.

对于两个广义函数 $S$ 和 $T$,也可以定义相应的卷积.为此先证明两个引理,它们是古典函数含参变量积分连续性和可微性定理在广义函数空间上的推广.

**引理 1.7.1** 设 $\psi(x,\lambda)$是 $C_0^\infty(\Omega)$的一族函数,依赖于一个实或复的参数 $\lambda$.假定:(1) 当 $\lambda$ 在 $\lambda_0$ 的某个邻域 $V(\lambda_0)$内时,$\psi(x,\lambda)$的支集包含在 $\Omega$ 的一个固定的紧子集内;(2) 对每个 $\alpha\in\mathbf{Z}_+^n$，导数$(\partial^\alpha\psi/\partial x^\alpha)(x,\lambda)$是$(x,\lambda)$的连续函数，那么对每一个 $T\in\mathbf{D}'(\Omega)$，$\langle T_x,\psi(x,\lambda)\rangle$是 $\lambda$ 的连续函数.

**证** 设

$$\varphi_\lambda(x)=\psi(x,\lambda)-\psi(x,\lambda_0)$$

那么条件(1)和(2)表明当 $\lambda\to\lambda_0$ 时,在 $C_0^\infty(\Omega)$内 $\varphi_\lambda\to 0$.因此,对每个 $T\in\mathbf{D}'(\Omega)$,当 $\lambda\to\lambda_0$ 时,有$\langle T_x,\varphi_\lambda(x)\rangle\to 0$.由此得$\langle T_x,\psi(x,\lambda)\rangle$的连续性.证毕.

**引理 1.7.2** 设 $\psi(x,\lambda)$是 $C_0^\infty(\Omega)$的一族函数,依赖于一个实或复的参数 $\lambda$.假定:(1) 当 $\lambda$ 在 $\lambda_0$ 的某个邻域 $V(\lambda_0)$内时,$\psi(x,\lambda)$的支集包含在 $\Omega$ 的一个固定的紧支集内;(2) 对每个 $\alpha\in\mathbf{Z}_+^n$,

$(\partial^\alpha\psi/\partial x^\alpha)(x,\lambda)$(在古典意义下)的导数

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial^\alpha\psi}{\partial x^\alpha}(x,\lambda)$$

是 $(x,\lambda)$ 的连续函数．那么对每个 $T\in D'(\Omega)$, $<T_x,\psi(x,\lambda)>$ 在 $\lambda_0$ 的一个邻域内可微，并且

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}<T_x,\psi(x,\lambda)> = <T_x,\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(x,\lambda)>$$

证　设

$$\varphi_h(x)=\frac{\psi(x,\lambda+h)-\psi(x,\lambda)}{h}-\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(x,\lambda)$$

条件 (1) 和 (2) 意味着在 $C_0^\infty(\Omega)$ 内 $\varphi_h\to 0$. 因此，对每个 $T\in D'(\Omega)$, 当 $h\to 0$ 时，有

$$<T_x,\frac{\psi(x,\lambda+h)-\psi(x,\lambda)}{h}>\to<T_x,\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(x,\lambda)>$$

证毕.

应该指出,上述两个引理对于依赖多个参数$(\lambda_1,\cdots\lambda_\gamma)$的情况也成立.其次,在 $T\in E'(\Omega)$以及 $\psi(x,\lambda)$是 $C^\infty(\Omega)$的函数族的情况下,也有与上述两个引理相类似的结论.

**引理 1.7.3**　若 $T\in E'(R^n)$,则　$\forall\psi\in D(R^n)$

$$\varphi(x)=<T_y,\psi(x+y)>\quad\in D(R^n)$$

**证**　由引理 1.7.2 知,$(T*\psi)\in C^\infty(R^n)$.作 $l(y)\in D(R^n)$使得 $l(y)$在 $K=\mathrm{supp}T$ 上为 1,则必有 $l(y)T_y=T_y$ ,又

$$\varphi(x)=<l(y)T_y,\psi(x+y)>=<T_y,l(y)\psi(x+y)>$$

当 x 充分大时,$\psi(x+y)$作为 $y$ 的函数,其支集与 $l(y)$的支集不相交,故 $l(y)\psi(x+y)=0$.从而 x 充分大时,有 $\varphi(x)=0$ 即 $\varphi(x)\in D(R^n)$.证毕.

由引理 1.7.3 知,对 $T\in E'(R^n)$和 $S\in D'(R^n)$,$<S_x,<T_y,\psi(x,y)>>$有意义.于是

**定理 1.7.1**　对于任一 $T\in E'(R^n)$和任一 $S\in D'(R^n)$,广义函数

卷积$\forall\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$<S*T,\psi> = <S_x,<T_y,\psi(x+y)>> \tag{1.7.1}$$

有意义,并且定义了一个广义函数 $S*T\in \mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$.

证　由引理 1.7.3 知,(1.7.1)式有意义.

现在证明 $S*T\in \mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$.令 $\psi_n(x)\in \mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$,且在 $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$中 $\psi_n(x)\to 0$,则 $\varphi_n(x)=<T_y,\psi_n(x+y)>$有一致有界的支集,而且存在 $c$ 和 $m$,使得

$$|\varphi_n(x)|=|<T_y,\psi_n(x+y)>|\leqslant c\sup_{\substack{|\alpha|\leqslant m\\ y\in\mathbf{R}^n}}|\partial_y^\alpha\psi_n(x+y)|$$

故由在 $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$中 $\psi_n\to 0$,可知 $\varphi_n(x)$一致收敛于 0.同理可知 $\varphi_n(x)$的各阶导数都一致收敛于 0,从而在 $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$中 $\varphi_n(x)\to 0$ ,因此 $<S_x,\varphi_n(x)>\to 0$.即 $S*T$ 是 $\mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$上连续泛函.证毕.

**推论 1.7.1**　如果 $T\in \mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$,$S\in \mathbf{E}'(\mathbf{R}^n)$,那么,(1.7.1)式仍然有意义且 $S*T\in \mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$.

证　当 $T\in \mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$时,$<T_y,\psi(x+y)>\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$,但 $S\in \mathbf{E}'(\mathbf{R}^n)$,故$<S_x,<T_y,\psi(x+y)>>$有意义,同定理 1.7.1 证明可得 $S*T\in \mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$.证毕.

**引理 1.7.4**　对每一个 $\psi(x,y)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m)$,存在多项式序列 $\{p_k(x,y)\}$ 在 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m)$ 内收敛于 $\psi$.其中 $p_k(x,y)=\sum_{l=0}^{N}u_l(x)v_l(y)$,且 $u_l(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 和 $v_l(y)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$

证　设 $\operatorname{supp}\psi\subset B_R=\{(x,y):\ x^2+y^2<R^2\}$,由 Weierstrass定理知,存在多项式$q_k(x,y)$,使得

$$|\partial^\alpha\psi-\partial^\alpha q_k|<1/k\quad \forall|\alpha|\leqslant k\text{和}x^2+y^2\leqslant 8R^2$$

构造函数$\eta_1(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,$\eta_2(y)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$使得

$$\eta_1(x)=\begin{cases}1 & \text{当}|x|<R\\ 0 & \text{当}|x|>2R\end{cases}\qquad \eta_2(y)=\begin{cases}1 & \text{当}|y|<R\\ 0 & \text{当}|y|>2R\end{cases}$$

由此得

$$p_k(x,y)=\eta_1(x)\eta_2(y)q_k(x,y)$$

由定义易知 $\mathrm{supp}\ p_k(x,y)\subset B_{2\sqrt{2}R}$；又 $\forall \alpha\in Z^n_+$，$|\alpha|\leqslant k$ 和 $(x,y)\in B_{2\sqrt{2}R}$，有

$$|\partial^\alpha\psi-\partial^\alpha p_k|=|\partial^\alpha\psi-\partial^\alpha(\eta_1\eta_2 q_k)|\leqslant c_\alpha/k$$

其中 $c_\alpha$ 只与 $\alpha$ 有关．故 $p_k(x,y)$ 在 $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m)$ 内收敛于 $\psi(x,y)$. 证毕．

**定理 1.7.2** 如果 $S,T\in D'(\mathrm{R}^n)$ 可以求卷积，则卷积次序可以交换，即 $\mathrm{S}*\mathrm{T}=\mathrm{T}*\mathrm{S}$.

**证** 由广义函数相等的定义知，只须证明 $\forall\psi\in\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 有 $<\mathrm{S}*\mathrm{T},\psi>=<\mathrm{T}*\mathrm{S},\psi>$ 即可．又由引理 1.7.4 知，只要证 $\forall p_k(x,y)\in\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$，有

$$<S*T,p_k(x,y)>=<T*S,p_k(x,y)>.$$

我们知道，当 $p_k\in\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$，时 $<\mathrm{S}_x,<\mathrm{T}_y,p_k(x,y)>>$ 以及 $<\mathrm{T}_y<\mathrm{S}_x,p_k(x,y)>>$ 都是 $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$ 上的线性连续泛函．但是当 $\psi(x),\varphi(y)\in\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 时，有

$$<\mathrm{S}_x,<\mathrm{T}_y,\psi(x)\varphi(y)>>=<\mathrm{T}_y,\varphi(y)><\mathrm{S}_x,\psi(x)>$$

$$<\mathrm{T}_y,<\mathrm{S}_x,\psi(x)\varphi(y)>>=<\mathrm{S}_x,\psi(x)><T_y,\varphi(y)>$$

故对引理 1.7.4 中给出的 $p_k(x,y)=\sum\limits_{l=0}^{N}u_l(x)v_l(y)$ 有

$$<S_x,<T_y,\sum_{l=0}^{N}u_l(x)v_l(y)>>=<T_y,<S_x,\sum_{l=0}^{N}u_l(x)v_l(y)>>$$

从而对一切 $p_k\in\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$，有

$$<\mathrm{S}_x,<\mathrm{T}_y,p_k(x,y)>>=<\mathrm{T}_y,<\mathrm{S}_x,p_k(x,y)>>$$

这就说明，如把 $<\mathrm{S}_x,<\mathrm{T}_y,\cdot>>,<\mathrm{T}_y,<\mathrm{S}_x,\cdot>>$ 看作 $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$上的广义函数，它们是相等的．因此

$$<S*T,\psi>=<T*S,\psi>$$

此即 $S*T=T*S$.证毕．

关于函数卷积，有如下重要结果(参阅 Barros[5])：

(1) 设 $p,q$ 和 $r$ 都是实数，$(1\leqslant p,q,r\leqslant+\infty)$，且 $r^{-1}=p^{-1}+q^{-1}-1$.

若 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$, $g\in L^q(\mathbf{R}^n)$,则 $f*g\in L^r(\mathbf{R}^n)$,并且

$$\|f*g\|_{o,r,\mathbf{R}^n}\leqslant\|f\|_{o,p,\mathbf{R}^n}\|g\|_{o,q,\mathbf{R}^n}$$

(2) 设 $p=1$,对每个 $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$,映射 $g\in L^q(\mathbf{R}^n)\to f*g\in L^q(\mathbf{R}^n)$是连续线性的,其范数 $\leqslant\|f\|_{o,1,\mathbf{R}^n}$

(3) 双线性映射$(f, g)\in L^1(\mathbf{R}^n)\times L^1(\mathbf{R}^n)\to f*g\in L^1(\mathbf{R}^n)$

是连续的,并且有

$$\|f*g\|_{o,1,\mathbf{R}^n}\leqslant\|f\|_{o,1,\mathbf{R}^n}\|g\|_{o,1,\mathbf{R}^n}.$$

关于广义函数的卷积,有如下性质:

(1) 设 $S,T\in D'(\mathbf{R}^n)$,并设其中至少有一个有紧支集,则有

$$\text{supp}(S*T)\subset\text{supp } S+\text{supp } T \tag{1.7.2}$$

事实上,设 $A=\text{supp}S,B=\text{supp}T$.因为 $A$ 和 $B$ 都是闭集并且至少一个是紧的,所以

$$A+B=\{x+y:\ x\in A,y\in B\}$$

是闭的.现在证明 $S*T$ 在开集 $\Omega=(A+B)^C$ 上等于零.事实上,若 $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$,则

$$\text{supp}\psi(x+y)\subset\ \{(x,y)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n:\ x+y\in\Omega\}$$

另一方面,$<S*T, \psi>=<S_x, <T_y, \psi(x+y)>>$中,如果 $y\notin\text{supp}T$,有 $<T_y, \psi(x+y)>=0$ 或 $x\notin\text{supp}S$,有 $<S_x, <T_y, \psi(x+y)>>=0$ .总之,如果$(x, y)\notin\text{supp}T\times\text{supp}S$ 则有 $<S*T, \psi>=0$,此即$(x, y)\in(\text{supp}T\times\text{supp}S)^c$ 有 $<S*T, \psi>=0$ .

(2) 设 $R$、$S$ 和 $T\in D'(\mathbf{R}^n)$中至少两个有紧支集,则卷积是可结合的,即

$$(R*S)*T=R*(S*T)=R*S*T \tag{1.7.3}$$

事实上,由于对 $R$、$S$、$T$ 的支集所作的假设,上式中的卷积都有意义.$\forall\psi C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,用上式中的各个卷积作用后,容易验证有相同的值

$$<R_x, <S_y, <T_z, \psi(x+y+z)>>>$$

(3) $\delta$ 函数是卷积的单位元,即

$$\delta * T = T \tag{1.7.4}$$

事实上,$\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$有

$$< \delta * T, \psi > = < T * \delta, \psi > = < T_x, < \delta_y, \psi(x+y) > >$$

$$= < T_x, \psi(x) > = < T, \psi >$$

综上所述,有

**定理 1.7.3** $\mathbf{E}'(\mathbf{R}^n)$的广义函数的全体关于线性运算及卷积运算构成一个可交换的、可结合的以及有单位元的代数.其单位元是广义函数 $\delta$.

(4) 导数与卷积.

$$\partial_k T = \partial_k \delta * T \tag{1.7.5}$$

事实上,$\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,有

$$< \partial_k T, \psi > = - < T, \partial_k \psi >$$

$$= - < T_x, < \delta_y, \partial_k \psi(x+y) > >$$

$$= < T_x, < \partial_k \delta_y, \psi(x+y) > >$$

$$= < T_x, * \partial_k \delta_y, \psi > = < (\partial_k \delta_y) * T, \psi >$$

这个性质表明,为了求卷积的微分,只要求其中一个因子的微分,即

$$\partial_k (S * T) = \partial_k S * T = S * \partial_k T \tag{1.7.6}$$

(5) 卷积和平移. 设 $h \in \mathbf{R}^n$,$\psi$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 内的一个函数,$\psi$ 的平移是一个函数,定义为

$$(\tau_h \psi)(x) = \psi(x - h)$$

如果 $\psi \in C^\infty$(或$C_0^\infty$),显然有 $\tau_h \psi \in C^\infty$(或$C_0^\infty$).从而广义函数 $T$ 的平移定义为

$$< \tau_h T, \psi > = < T, \tau_{-h} \psi > \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

容易证明$\forall h \in \mathbf{R}^n$, $\tau_h T$是一个广义函数,并且

$$\tau_h: \ D'(\mathbf{R}^n) \to \ D'(\mathbf{R}^n)$$

在强拓扑下是一个连续线性映射.

和§1.5中例15一样,$\forall h \in \mathbf{R}^n$, $\delta_{(h)}$定义为

$$<\delta_{(h)},\psi> = \psi(h) \qquad \forall\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$$

则有

$$\tau_h T = \delta_{(h)} * T \qquad \forall T\in D'(\mathbf{R}^n) \tag{1.7.7}$$

事实上,$\forall\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$<\tau_h T,\psi> = <T,\tau_{-h}\psi> = <T_x,\psi(x+h)>$$

又由$\psi(x+h) = <(\delta_{(h)})_\eta,\psi(x+\eta)>$,得

$$<\tau_h T,\psi> = <T_x,<(\delta_{(h)})_\eta,\psi(x+\eta)>>$$
$$= <T*\delta_{(h)},\psi> = <\delta_{(h)}*T,\psi>$$

利用卷积的可交换性和可结合性,作为性质(5)的推论,可以得到

$$\tau_h(S*T) = (\tau_h S)*T = S*(\tau_h T) \tag{1.7.8}$$

(6) 双线性映射

$$(S,T)\in \mathbf{E}'(\mathbf{R}^n)\times D'(\mathbf{R}^n)\to S*T\in D'(\mathbf{R}^n)$$

对每个变量连续.

(7) $\forall\psi\in D(\mathbf{R}^n)$,则$\psi$可视为$D'(\mathbf{R}^n)$中的元素,且

$$(T*\psi)(x) = <T_\zeta,\psi(x-\zeta)> \tag{1.7.9}$$

事实上,$\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$<T*\psi,\varphi> = <T_\xi,<\psi(\eta),\varphi(\xi+\eta)>>$$
$$= <T_\xi,<\psi(x-\xi),\varphi(x)>>$$
$$= <<T_\xi,\psi(x-\xi)>,\varphi(x)>$$

从而得到(1.7.9),它正是广义函数和函数的卷积.

**定理 1.7.4** 设 $\psi\in \mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$(或 $\psi\in \mathbf{E}(\mathbf{R}^n)$),并设 $T\in \mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$(或 $T\in \mathbf{E}'(\mathbf{R}^n)$),则

(1) $T*\psi\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$

(2) 双线性映射

$$(\psi,T)\to T*\psi$$

从 $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)\times \mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$(或 $\mathbf{E}(\mathbf{R}^n) * \mathbf{E}'(\mathbf{R}^n)$)映到 $\mathbf{E}(\mathbf{R}^n)$内且对每个变量都是连续的.

证 (1) 因为$(T*\psi)(x) = <T_y, \psi(x-y)>$,则由引理 1.7.1

知$(T*\psi)(x)$是 $x$ 的连续函数,由引理 1.7.2 有 $\partial^\alpha(T*\psi)=T*\partial^\alpha\psi$.从而 $T*\psi\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

(2) 为了证明映射 $\psi\in D(\mathbf{R}^n)\to T*\psi\in E(\mathbf{R}^n)$是连续的,只须证明对每个紧子集 $K\subset\mathbf{R}^n$,映射

$$\psi\in C_K^\infty(\mathbf{R}^n)\to T*\psi\in E(\mathbf{R}^n)$$

是连续的.换句话说,要证明对所有的 $\mathbf{R}^n$ 上的紧子集 $L$,存在常数 $c>0$ 以及整数 $m>0$,使得

$$\sup_{x\in L}|\partial^\alpha(T*\psi)|\leqslant c\sup_{\substack{|\beta|\leqslant m\\ z\in K}}|\partial^\beta\psi(z)|\quad\forall\alpha\in Z_+^n$$

当 $x\in L$ 以及 $y\in K$ 时,$(\tau_y\psi)(x)=\psi(x-y)\in C_{L-K}^\infty(\mathbf{R}^n)$. 又由于 $T\in\mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$,根据定理 1.4.1 知存在常数 $c>0$ 以及整数 $l\geqslant 0$ 使得

$$|<T,\psi>|\leqslant c\sup_{\substack{|\gamma|\leqslant l\\ y\in\mathbf{R}^n}}|\partial^\gamma\psi(y)|\quad\forall\psi\in C_{L-K}^\infty(\mathbf{R}^n)$$

还有 $\partial^\beta(T*\psi)(x)=(T*\partial^\beta\psi)(x)=<T_y,\partial^\beta\psi(x-y)>$,所以有

$$\sup_{x\in L}|\partial_x^\alpha(T*\psi)(x)|=\sup_{x\in L}|<T_y,\partial_x^\alpha\psi(x-y)>|$$

$$\leqslant c\sup_{x\in L}\sup_{\substack{|\gamma|\leqslant l\\ y\in\mathbf{R}^n}}|\partial_y^\gamma\partial_x^\alpha\psi(x-y)|\leqslant c\sup_{\substack{x\in\mathbf{R}^n\\ |q|\leqslant l+|\beta|}}|\partial^q\psi(x)|$$

这就是我们所要求的

(3) 设 $\psi\in D(\mathbf{R}^n)$是任一固定元素,K 为 $\mathbf{R}^n$ 中任一紧子集,如果 $x\in K$,那么 $\psi(x)$在 $D(\mathbf{R}^n)$中有界.因此,如果广义函数 $T_j$ 强收敛于 0,则

$$<T_j*\psi>(x)=<T_j,\ \psi(x-y)>$$

在 K 上一致收敛于 0.上式对 $x$ 求导,且$\forall\alpha\in Z_+^n$,利用(1.7.6)有

$$\partial_x^\alpha(T_j*\psi)(x)=(T_j*\partial_x^\alpha\psi)(x)=(T_j,\ \partial_x^\alpha\psi(x-y))$$

在 $\mathbf{R}^n$ 的任何紧子集 $K$ 上一致收敛于 0,从而在 $D(\mathbf{R}^n)$ 中 $T_j*\psi$

$\to 0$. 证毕.

## §1.8 磨光算子、平均函数和单位分解

在§1.3例1中已经介绍了函数

$$\psi(x)=\begin{cases}\exp(|x|^2-1)^{-1} & 当|x|<1时,\\ 0 & 当|x|\geqslant 1时.\end{cases}$$

以及若 $c=\int_{\mathbf{R}^n}\psi(x)dx$, 则记 $\alpha(x)=\frac{1}{c}\psi(x)$, 显然 $\alpha(x)$ $\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 而且 $\int_{\mathbf{R}^n}\alpha(x)dx=1$ 以及 $\operatorname{supp}\ \alpha(x)\subset B_1(0)$.

如果 $\varepsilon>0$, 定义函数 $\omega_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\alpha(x/\varepsilon)$, 则由 $\alpha(x)$ 的性质易知 $\omega_\varepsilon(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\operatorname{supp}\ \omega_\varepsilon(x)=B_\varepsilon(0)=\{x\in\mathbf{R}^n:|x|\leqslant\varepsilon\}$, $\omega_\varepsilon(x)\geqslant 0, \forall x\in\mathbf{R}^n$ 以及

$$\int_{\mathbf{R}^n}\omega_\varepsilon(x)dx=1$$

函数$\omega_\varepsilon(x)$称为软化子.

**定义 1.8.1** 称检验函数族 $\{\omega_\varepsilon(x)\}(\varepsilon>0)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 内函数的正则化族.

特别如果$\omega=(j)^{-1}$,则称函数序列

$$\varepsilon_j(x)=j^n\alpha(jx)\qquad j=1,2,\cdots$$

是函数的正则化序列.

借助于$\{\omega_\varepsilon(x)\}(\varepsilon>0)$可将不连续函数,如可积函数,正则化,即这些函数可用检验函数来逼近.

设 $f$是 $\Omega$ 上任一局部可积函数,则卷积 $\omega_\varepsilon * f$可以用来定义磨光算子 $J_\varepsilon$.

**定义1.8.2** 若$f\in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$,则磨光算子$J_\varepsilon$定义为

$$J_\varepsilon f=\omega_\varepsilon * f=\int_{\mathbf{R}^n}\omega_\varepsilon(x-y)f(y)dy \tag{1.8.1}$$

通常记$f_\varepsilon = J_\varepsilon f$,$f_\varepsilon$称为对应于$f$的平均函数.

有时也称$f_\varepsilon$是函数$f$的光滑化或正则化.下面的定理给出了光滑化的一些性质.为此首先叙述 Lebesgue 积分理论中的有关概念和定理.

$\mathbf{R}^n$ 上的一个实值可测函数 $f(x)$,如果它的函数值只取有限个实数,则称$f$为定义在$\Omega$上的简单函数.如果对于一切$x$,$f(x)\in\{a_1,\cdots,a_m\}$,则显然有$f(x)=\sum_{j=1}^{m}a_j\chi_{A_j}$,其中$A_j=\{x\in\mathbf{R}^n:\ f(x)=a_j\}$,$\chi_{A_j}$是$A_j$上的特征函数.由于下面的逼近定理,简单函数在积分论中是一个非常有用的工具.

**定理 1.8.1** 设$\Omega\subset\mathbf{R}^n$是开集,$f(x)$是定义在集合$\Omega$上的非负可测函数,则存在一个非负单调增加的简单函数序列$\{S_n(x)\}$,使得在每一点上收敛于$f(x)$.

**定理 1.8.2** (Lusin定理) 设$\Omega\subset\mathbf{R}^n$是有界开集,$f(x)$是定义在$\Omega$上几乎处处有界的可测函数,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在一个函数$g(x)\in\mathbf{C}_0(\Omega)$,满足

$$\sup_{x\in\Omega}|g(x)|\leqslant\sup_{x\in\Omega}|f(x)|,\text{以及}$$

$$\mu(\{x\in\Omega:\ f(x)\neq g(x)\})<\varepsilon$$

这里$\mu(G)$表示集合$G$的Lebesgue测度.

**定理1.8.3** 设区域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$满足$\mu(\Omega)=\int_\Omega dx<+\infty$,又$1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$.

(1) 如果$f\in\mathbf{L}^q(\Omega)$,则$f\in\mathbf{L}^p(\Omega)$且

$$\|f\|_{0,p,\Omega}\leqslant\mu(\Omega)^{(1/p)-(1/q)}\|f\|_{0,q,\Omega}\tag{1.8.2}$$

(2) 如果$f\in\mathbf{L}^\infty(\Omega)$,则

$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_{0,p,\Omega}=\|f\|_{0,\infty,\Omega}\tag{1.8.3}$$

(3) 如果对于$1\leqslant p<\infty$,$f\in\mathbf{L}^p(\Omega)$,且存在常数$k$满足

$$\|f\|_{o,p,\Omega} \leqslant k \qquad \forall p \in [1,\infty) \tag{1.8.4}$$

则$f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$且

$$\|f\|_{o,\infty,\Omega} \leqslant k \tag{1.8.5}$$

证 当$p=q$时,(1.8.2)是显然的.当$1 \leqslant p < q < \infty$且$f \in \mathbf{L}^q(\Omega)$时,由 Hoelder 不等式有

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx \leqslant \left\{\int_\Omega |f(x)|^q dx\right\}^{p/q} \left\{\int_\Omega 1 dx\right\}^{1-p/q}$$
$$= \|f\|^p_{o,q,\Omega}\mu(\Omega)^{(1-p)/q}$$

当$q=\infty$时,有

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx \leqslant \|f\|^p_{o,\infty,\Omega}\int_\Omega 1 dx = \mu(\Omega)\|f\|^p_{o,\infty,\Omega}$$

由此,可立刻得出(1.8.2).

又如果$f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$,由(1.8.2)有

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_{o,p,\Omega} \leqslant \|f\|_{o,\infty,\Omega} \tag{1.8.5'}$$

另一方面,对于任何$\varepsilon > 0$存在一个集合$A \subset \Omega$,其测度$\mu(A) > 0$,使得(下面记$\|f\|_{\infty,\Omega} = \|f\|_{o,\infty,\Omega}$)

$$|f(x)| \geqslant \|f\|_{\infty,\Omega} - \varepsilon \qquad \forall x \in A$$

因此

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx \geqslant \int_A |f(x)|^p dx \geqslant \mu(A)(\|f\|_{\infty,\Omega} - \varepsilon)^p$$

于是 $\|f\|_{o,p,\Omega} \geqslant (\mu(A))^{1/p}(\|f\|_{\infty,\Omega} - \varepsilon)$,从而

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_{o,p,\Omega} \geqslant \|f\|_{\infty,\Omega} \tag{1.8.6}$$

从(1.8.5')和(1.8.6)可得(1.8.3).

最后,用反证法,即假定对于$1 \leqslant p < \infty$,(1.8.4)式成立,如果$f \notin \mathbf{L}^\infty(\Omega)$或$f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$,但(1.8.5)式不成立,则能够找到常数$k_1 > k$和集合$A \subset \Omega(\mu(A) > 0)$,使得对于$x \in A, f(x) \geqslant k_1$,用得到(1.8.6)式的同样的论证可以证明

$$\lim_{p\to\infty}\inf\|f\|_{o,p,\Omega}\geqslant k_1$$

这与(1.8.4)式矛盾．证毕．

**定理 1.8.4** 如果 $1\leqslant p<\infty$,则 $C_0(\Omega)$在 $L^p(\Omega)$中稠密.

**证** 设 $f\in L^p(\Omega)$,又设 $\varepsilon>0$,我们要证明存在一个函数 $\psi\in C_0(\Omega)$,使得 $\|f-\psi\|_{o,p,\Omega}<0$.不失一般性,设 $f$是非负实函数,由定理 1.8.1,存在一个在 $\Omega$ 上点收敛到 $f$的单调增加,非负简单函数序列$\{S_n\}$,因为 $0\leqslant S_n(x)\leqslant f(x)$,我们有 $S_n\in L^p(\Omega)$.又$(f(x)-S_n(x))^p\leqslant(f(x))^p$,由 Lebesgue 控制收敛定理* 知,在 $L^p(\Omega)$中 $S_n\to f$,因此,可以选取 $S\in\{S_n\}$使得 $\|f-S\|_{o,p,\Omega}<\varepsilon/2$.由于 $S$ 是简单函数而且 $p<\infty$,$\mu(\mathrm{supp}S)<\infty$.由定理 1.8.2,我们得到一个函数 $\psi\in C_0(\Omega)$,使得$\forall x\in\Omega$.

$$|\psi(x)|\leqslant\|S\|_{\infty,\Omega}(=\|S\|_{0,\infty,\Omega})$$

并且

$$\mu\{x\in\Omega:\ S(x)\neq\psi(x)\}<(\varepsilon/4\|S\|_{\infty,\Omega})^p$$

因此由定理 1.8.3 有

$$\|S-\psi\|_{o,p,\Omega}\leqslant\|S-\psi\|_{\infty,\Omega}(\mu\{x\in\Omega:\ S(x)\neq\psi(x)\})^{1/p}$$
$$<2\|S\|_{\infty,\Omega}(\varepsilon/4\|S\|_{\infty,\Omega})=\varepsilon/2$$

由此得到 $\|f-\psi\|_{o,p,\Omega}<\varepsilon$．证毕.

**定理 1.8.5** 设 $f$是定义在 $R^n$ 上的函数,$f$在区域 $\Omega$ 外恒等于零.

(1) 如果$f\in L^1_{loc}(\overline{\Omega})$,则$f_\varepsilon\in C^\infty(R^n)$.

(2) 如果还有 $\mathrm{supp}f\subset\subset\Omega$, 且 $0<\varepsilon<\mathrm{dist}(\mathrm{supp}f,\partial\Omega)$, 则 $f_\varepsilon\in C_0^\infty(\Omega)$.

---

* Lebesgue控制收敛定理：设$A\subset R^n$是可测集,又设可测函数序列$\{f_n\}$在$A$上逐点收敛到一个极限函数.如果存在一个函数 $g\in L^1(A)$使得对一切 $n$ 和一切 $x\in A$ 有 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx=\int_A\left(\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx$.

(3) 如果 $f\in L^p(\Omega)$，其中 $1\leqslant p<\infty$，则 $f_\varepsilon\in L^p(\Omega)$，$\|f_\varepsilon\|_{0,p,\Omega}\leqslant\|f\|_{0,p,\Omega}$ 以及

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f_\varepsilon-f\|_{0,p,\Omega}=0$$

(4) 如 $f\in C(\Omega)$,则对任意 $K\subset\subset\Omega$,在 K 上一致有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}f_\varepsilon(x)=f(x)$$

**证** 在 (1.8.1) 中 $\omega_\varepsilon(x-y)$ 关于 $x$ 是一个无穷次可微函数，各阶导数在 $|x-y|\geqslant\varepsilon$ 上等于 0, 又由于对每个 $\alpha\in Z_+^n$ 和一切在 $R^n$ 的紧集上可积的函数有

$$\partial^\alpha f_\varepsilon(x)=\partial^\alpha(\omega_\varepsilon*f)(x)=\int_{R^n}\partial_x^\alpha\omega_\varepsilon(x-y)f(y)dy$$

故 $f_\varepsilon\in C^\infty(R^n)$.

对于(2),注意到

$$f_\varepsilon(x)=(\omega_\varepsilon*f)(x)=\int_{R^n}f(x-\varepsilon y)\alpha(y)dy$$

$$=\int_{|y|\leqslant 1}f(x-\varepsilon y)\alpha(y)dy \qquad (1.8.7)$$

记 $K_\varepsilon=\{x\in R^n:\ \mathrm{dist}(x,\mathrm{supp}f)<\varepsilon\}$ ,集合

$$B_\varepsilon(x)=\{x-\varepsilon y:\ |y|\leqslant 1\}$$

$B_\varepsilon(x)$ 是以 $x$ 为球心，$\varepsilon$ 为半径的闭球．当 $x\notin K_\varepsilon$ 时，$B_\varepsilon(x)\bigcap\mathrm{supp}f=\theta$, 所以在 $B_\varepsilon(x)$ 上 $f=0$, 又由 (1.8.7) 可得

$$f_\varepsilon(x)=(\omega_\varepsilon*f)(x)=0$$

从而 $f_\varepsilon\in C_0^\infty(\Omega)$,即(2)得证.

假设 $f\in L^p(\Omega)$. 如果 $1<p<\infty$, 我们设 $p'=p/(p-1)$, 由 Hoelder 不等式得

$$|f_\varepsilon(x)|=\left|\int_{R^n}\omega_\varepsilon(x-y)f(y)dy\right|$$

$$\leqslant\left\{\int_{R^n}\omega_\varepsilon(x-y)dy\right\}^{1/p'}\left\{\int_{R^n}\omega_\varepsilon(x-y)|f(y)|^pdy\right\}^{1/p}$$

$$= \left\{\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p dy\right\}^{1/p}$$

因此,由 Fubini 定理

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon\|_{0,p,\Omega}^p &= \int_\Omega |f_\varepsilon(x)|^p dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y) dx = \|f\|_{0,p,\Omega}^p \end{aligned} \tag{1.8.8}$$

设 $\eta>0$, 由定理 1.8.4 知存在 $\psi \in C_0(\Omega)$, 使得 $\|f-\psi\|_{0,p,\Omega}<\eta/3$. 故由 (1.8.8) 式,$\|f_\varepsilon-\psi_\varepsilon\|_{0,p,\Omega}<\eta/3$. 又

$$\begin{aligned}|\psi_\varepsilon(x)-\psi(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)(\psi(y)-\psi(x))dy\right| \\ &\leqslant \sup_{|y-x|<\varepsilon} |\psi(y)-\psi(x)| \end{aligned} \tag{1.8.9}$$

由于 $\psi$ 在 $\Omega$ 上一致连续、当 $\varepsilon \to 0$ 时,(1.8.9)的右端趋于 0.由于 $\mathrm{supp}\psi$ 是紧的,故有充分小的 $\varepsilon$ 使得 $\|\psi_\varepsilon-\psi\|_{0,p,\Omega}<\eta/3$,从而对于这样的 $\varepsilon$,有 $\|f_\varepsilon-f\|_{0,p,\Omega}<\eta$,此即(3).如果 $p=1$,直接由磨光算子的定义式(1.8.1)得到(1.8.8),而(3)的证明的其余部分和上面的叙述一样.在(1.8.9)中用 $f$ 代替 $\psi$,就可证明(4).证毕.

**推论 1.8.1** 如果 $1\leqslant p<\infty$,则 $C_0^\infty(\Omega)$在 $L^p(\Omega)$中稠密.

证明是前两个定理的直接推论.

在引理 1.4.3 中,我们已经讨论了单位分解的性质,并给出了从属于集合 $K$ 的覆盖 $\{O_j\}(1\leqslant j\leqslant k)$ 的单位 $C^\infty$ 分解的函数 $\{\psi_j\}(1\leqslant j\leqslant k)$. 为了以后讨论 Соболев 空间理论的需要 . 我们需要进一步地讨论单位分解的有关性质 .

**定义 1.8.3** 开集族 $Q=\{O_j\}$称为集合 K 的有限开覆盖,如果满足

(1) $K\subset \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$

(2) 对于 $K$ 中任一闭集 $G$, $\{O_i\}$ 中只有有限个开集与 $G$ 的交集不空.

如果只满足条件(1),开集族 Q 称为集合 K 的开覆盖.

**定理 1.8.6** K 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个集合,开集族 $Q=\{O_n\}$是 K 的一个开覆盖,则在 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$中存在函数序列$\{\psi_n\}$(有时可能只有有限个),满足

(1) 对每一个 $\psi_n$ 成立 $0\leqslant\psi_n(x)\leqslant 1,\forall x\in\mathbf{R}^n$;

(2) 如果 $G\subset\subset K$,函数序列$\{\psi_n\}$中只有有限个在 G 中不等于 0;

(3) 对任意 $\psi_n$,$Q$ 中必存在一个 $O_m$,使得 $\operatorname{supp}\psi_n\subset O_m$;

(4) 成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)=1\qquad,\qquad\forall x\in K.$$

证 分三种情况讨论

($a$) $K$ 是有界闭集时,从 $Q$ 中可以选取有限个开集,不妨设,$O_1,\cdots,O_n$ 满足 $K\subset\bigcup_{i=1}^{n}O_i$,由引理 1.4.3 知 $\{\psi_n\}$ 存在,且满足条件 (1)~(4). 此时 $\{O_i\}$ 只有有限个.

($b$) $K$ 是开集时,若 $\Gamma$ 表示 $K$ 的边界,构造集合 $G_n=\{x\in K:\ |x|\leqslant n,\operatorname{dist}(x,\Gamma)\geqslant\frac{1}{n}\}$ ,$n=1,2,\cdots$.

令 $G_0=\theta$,用 $G_n'$ 表示由 $G_n$ 的内点组成的集合. 设

$$K_n=G_n\setminus G_{n-1}'\qquad,\qquad n=1,2,\cdots$$

因为 $G_n$ 是闭集,且 $G_1\subseteq G_2\cdots$,所以 $K_n$ 是有界闭集.作开集族

$$\tilde{O}_i=\{O_n\cap(G_{i+1}'\cap G_{i-2}^c):\ n=1,2\cdots\},\ i\geqslant 3$$

$$\tilde{O}_1=\tilde{O}_2=\ \{O_n\cap G_3:\ n=1,2,\cdots\}$$

这里可能开始几个 $K_n$ 是空集,但不影响讨论. 显然,只要在$\tilde{O}_i$中取有限个开集就能覆盖 $K_i$,这里不妨假设

$$\tilde{O}_i = \{O_{i1}, O_{i2}, \cdots, O_{in_i}\}$$

是$K_i$的开覆盖.

根据(1) 可知,存在$g_{ij}(j=1,2,\cdots,n_i)$,满足

1 $g_{ij} \in C_0^\infty(O_{ij})$;

2 $g_{ij} \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{n_i} g_{ij} \leqslant 1$;

3 在$K_i$的邻域上$\sum_{j=1}^{n_i} g_{ij} = 1$.

在 K 中任一有界闭集 G 上,序列$\{g_{ij}\}$ $(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots,n_i)\}$中只有有限个元素不为 0,因而函数

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i} g_{ij}(x) \in C^\infty(K)$$

且在 K 上 $g(x)>0$.设函数

$$\psi_{ij}(x) = \frac{g_{ij}(x)}{g(x)},\ \psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i} \psi_{ij}(x)$$

显然有 $\psi(x)=1$ , $\forall x \in K$. 易证由 $\psi_{ij}(x)$ 构成的序列 $\{\psi_{ij}(x)\}$ 满足条件(1)~(4).

($c$) $K$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中任一集合. 若存在开集 $G$, 使得 $K \subset G$ 且 $Q = \{O_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant \infty)$ 是 $G$ 的开覆盖. 由 ($b$) 知, 对于 $G$ 存在满足条件 (1)~(4) 的 $\{\psi_n\}$, 因而对 $K$ 来说, $\{\psi_n\}$ 也同样满足 (1)~(4). 证毕.

最后,利用正则化族$\{\omega_\varepsilon(x)\}(\varepsilon>0)$.讨论广义函数的正则性定理.为此先证

**定理 1.8.7** 若 $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,则当 $\varepsilon \to 0$ 时,$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$的函数$\omega_\varepsilon * \psi$ 在 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$内收敛于 $\psi$,并且这一收敛在 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$的有界子集上是一致的(在 $D(\mathbf{R}^n)$的拓扑下).

**证** 设 B 是 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$内的有界集,则存在 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集 L,使得 supp $\psi \subset L, \forall \psi \in B$,并且 B 是 $C_L^\infty(\mathbf{R}^n)$的有界子集.又由定理 1.8.5

知,存在 $R^n$ 的紧子集 K 使得 $L\subset K$,并且对所有 $\psi\in B$ 和 $0<\varepsilon<1$,$\mathrm{supp}(\omega_\varepsilon*\psi)\subset K$.

由于 B 在 $C_0^\infty(R^n)$内是有界的,由连续可微函空间的性质及定理 1.2.2(Ascoli-Arzela)容易证明,$\forall\alpha\in Z_+^n$,集合

$$\partial^\alpha B=\{\partial^\alpha\psi:\ \psi\in B\}$$

在 K 上一致等度连续.因此,给定一个非负整数 $m$ 和一个实数 $\sigma>0$,存在 $\delta>0$,$\forall|\alpha|\leqslant m$ 使得

$$|\partial^\alpha\psi(x-y)-\partial^\alpha\psi(x)|\leqslant\sigma,\qquad\forall|y|<\delta,\psi\in B,x\in K$$

现在考察 $C_k^\infty(R^n)$内原点的邻域

$$W(m,\sigma)=\{\psi\in C_k^\infty(R^n):\ |\partial^\alpha\psi(x)|\leqslant\sigma,\ \forall x\in K,\ \forall|\alpha|\leqslant m\}$$

我们可以写出

$$(\omega_\varepsilon*\partial^\alpha\psi-\partial^\alpha\psi)(x)$$
$$=\int_{R^n}\omega_\varepsilon(y)(\partial^\alpha\psi(x-y)-\partial^\alpha\psi(x))dy$$

设 $\varepsilon_0>0$ 充分小,使对所有 $\varepsilon<\varepsilon_0$,函数 $\omega_\varepsilon$ 的支集包含在以原点为中心,以 $\varepsilon$ 为半径的球内.那么对所有 $\psi\in B$,$|\alpha|\leqslant m$ 和 $\varepsilon<\varepsilon_0$

$$|(\omega_\varepsilon*\partial^\alpha\psi-\partial^\alpha\psi)(x)|$$
$$\leqslant\int_{R^n}\omega_\varepsilon(y)|\partial^\alpha\psi(x-y)-\partial^\alpha\psi(x)|dy\leqslant\sigma$$

即

$$(\omega_\varepsilon*\psi-\psi)\in W(m,\sigma),\forall\varepsilon\leqslant\varepsilon_0,\forall\psi\in B$$

这就证明了 $\varepsilon\to0$ 时,在 $C_0^\infty(R^n)$的有界子集上一致成立 $\omega_\varepsilon*\psi\to\psi$. 证毕.

如果我们将 $C_0^\infty(R^n)$改为 $C^\infty(R^n)$,上述结论仍然成立.

**定理 1.8.8** 设 $T\in D'(R^n)$(或 $T\in E'(R^n)$),则当 $\varepsilon\to0$ 时,$C^\infty(R^n)$(或 $C_0^\infty(R^n)$)的函数 $T*\omega_\varepsilon$ 在 $D'(R^n)$内强收敛于 $T$.

证 设 $T\in D'(R^n)$是任一固定元素,由(1.7.4)有 $<T,\psi>=<T*\delta,\psi>$,从而$\forall\psi\in C_0^\infty(R^n)$有

$$<T*\omega_\varepsilon-T,\psi>=<T*\omega_\varepsilon-T*\delta,\psi>$$

$$= <T*(\omega_\varepsilon-\delta),\psi>$$
$$= <T_x,<(\omega_\varepsilon-\delta)(y),\psi(x+y)>>$$
$$= <T_x,<\omega_\varepsilon(z-x),\psi(z)> - <\delta_y,\psi(x+y)>>$$
$$= <T_x,<\omega_\varepsilon(z-x),\psi(z)> - \psi(x)>$$
$$= <T_x,\omega_\varepsilon*\psi-\psi>$$

由定理 1.8.7 知当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\omega_\varepsilon*\psi-\psi\to 0$. 且对 $\psi$ 属于 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的一个有界子集是一致的．从而当 $\varepsilon\to 0$ 时，$<T*\omega_\varepsilon-T,\psi>\to 0$, 即 $T*\omega_\varepsilon$ 在 $D'(\mathbf{R}^n)$ 内强收敛于 $T$. 证毕．

**推论 1.8.2** 正则化函数族 $\{\omega_\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$ 在 $D'(\mathbf{R}^n)$ 的强拓扑内收于 $\delta$ 函数．

**证** 在定理 1.8.8 中取 $T=\delta$,并注意到 $T*\delta=T$ 即可得 $\omega_\varepsilon$ 在 $D'(\mathbf{R}^n)$内强收敛于 $\delta$.

## §1.9 Fourier 变换

1°.急降函数空间$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$上的 Fourier 变换

**定义 1.9.1** 急降函数 $f\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$的 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i<x,\xi>}f(x)\,dx, \tag{1.9.1}$$

这里 $<x,\xi>=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n$.

因为 $f\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$,所以积分(1.9.1)绝对收敛.$f$的 Fourier 变换有时也记为 $Ff$.

**例 1** 函数$\exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$的 *Fourier* 变换等于

$(2\pi)^{n/2}\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}\right)$.

下面讨论 Fourier 变换的性质:

**性质(1)** 设$f\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$,则$F(ix_jf)=-\partial\hat{f}/\partial\xi_j$

事实上，因为 $f\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$, 把 (1.9.1) 的两端对 $\xi_j$ 求导．由

于 (1.9.1) 右端积分对 $\xi$ 是一致收敛的．故可把求导移到积分号内，则有

$$\frac{\partial \hat{f}(\xi)}{\partial \xi_j}=\int_{\mathbf{R}^n}\frac{\partial}{\partial \xi_j}(e^{-i<x,\xi>}f(x))dx$$

$$=-\int_{\mathbf{R}^n}e^{-i<x,\xi>}(ix_jf(x))dx=-i\widehat{x_jf}$$

性质(2)　偏导数$\partial f/\partial x_j$的Fourier变换等于$i\xi_j\hat{f}$.

事实上,由分部积分可得

$$\frac{\widehat{\partial f}(\xi)}{\partial x_j}=\int_{\mathbf{R}^n}(e^{-i<x,\xi>})\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx$$

$$=i\xi_j\int_{\mathbf{R}^n}e^{-i<x,\xi>}f(x)dx=i\xi_j\hat{f}$$

**定理 1.9.1**　Fourier 变换确定一个从$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$到$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$的连续线性映射.

**证**　由性质(1)和(2)得

$$i^{|\beta|+|\alpha|}\xi^\beta\partial^\alpha\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}e^{-i<x,\xi>}\partial^\beta(x^\alpha f(x))dx$$

由定理 1.3.2 知，$\partial^\beta(x^\alpha f(x))\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$，从而由定理 1.3.1 知，对所有整数 $k\geqslant 0$，$(1+|x|^2)^k|\partial^\beta(x^\alpha f(x))|$ 在 $\mathbf{R}^n$ 内一致有界．如果选取 $k$ 使得

$$\int_{\mathbf{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^k}dx=c<+\infty$$

那么

$$|\xi^\beta\partial^\alpha\hat{f}(\xi)|\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}|\partial^\beta(x^\alpha f(x))|dx$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^k}(1+|x|^2)^k|\partial^\beta(x^\alpha f(x))|dx$$

$$\leqslant c\sup_{x\in\mathbf{R}^n}(1+|x|^2)^k|\partial^\beta(x^\alpha f(x))|$$

从而，对每个 $\alpha,\beta\in Z^n_+$，$\xi^\beta\partial^\alpha\hat{f}(\xi)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 内一致有界，所以

$\hat{f}\in\tilde{S}(R^n)$. 另一方面，由上述不等式，$\tilde{S}(R^n)$ 中的半范 $p_{\alpha,\beta}$ 以及定理 1.3.2 易知，如果 $\{f_j\}$ 是一个在$\tilde{S}(R^n)$ 内收敛于 0 的序列，则 Fourier 变换 $\{\hat{f}_j\}$ 也是在$\tilde{S}(R^n)$ 内收敛于 0 的，因此

$$F:\ \tilde{S}(R^n)\to\tilde{S}(R^n)$$

是一个连续线性映射． 证毕.

**定义 1.9.2** 若 $g\in\tilde{S}(R^n)$,积分

$$(2\pi)^{-n}\int_{R^n}e^{i<x,\xi>}g(x)dx \tag{1.9.2}$$

是绝对收敛的，并定义一个变量为$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的$\tilde{S}(R^n)$ 中的函数$\tilde{g}(\xi)$, 记为$(F^{-1}g)(\xi)$ 或称它为 $g$ 的 Fourier 逆变换．

如同定理 1.9.1 一样，可以证明，$F^{-1}$ 确定一个从$\tilde{S}(R^n)$ 到$\tilde{S}(R^n)$ 的连续线性映射．

根据定义,下列关系是容易验证的:

$$\overline{Fg}=(2\pi)^nF^{-1}\overline{g} \qquad 和 \qquad F\overline{g}=(2\pi)^n\overline{F^{-1}g} \tag{1.9.3}$$

**定理 1.9.2** (Fourier 反演公式) $\forall f\in\tilde{S}(R^n)$,我们有

$$f=F^{-1}(Ff)=F(F^{-1}f)$$

**证** 利用 Fubini 定理, $\forall f$ , $g\in\tilde{S}(R^n)$,有

$$\begin{aligned}&\int_{R^n}\hat{f}g(\xi)e^{i<x,\xi>}d\xi\\ &=\int_{R^n}g(\xi)e^{i<x,\xi>}\left\{\int_{R^n}e^{-i<y,\xi>}f(y)dy\right\}d\xi\\ &=\int_{R^n}\int_{R^n}e^{i<x-y,\xi>}g(\xi)f(y)d\xi dy\\ &=\int_{R^n}\hat{g}(y-x)f(y)dy\end{aligned} \tag{1.9.4}$$

作变量替换,上式可写为

$$\int_{R^n}\hat{f}(\xi)g(\xi)e^{i<x,\xi>}d\xi=\int_{R^n}\hat{g}(y)f(x+y)dy \tag{1.9.5}$$

用 $g(\varepsilon\xi)$ 代替 $g(\xi)$, 其 Fourier 变换等于 $\varepsilon^{-n}\hat{g}(y/\varepsilon)$. 再作变量替换得

$$\int_{\mathbf{R}^n}\hat{f}(\xi)g(\varepsilon\xi)e^{i<x,\xi>}d\xi=\int_{\mathbf{R}^n}\hat{g}(y)f(x+\varepsilon y)dy$$

在上面的关系中令 $\varepsilon\to 0$,得

$$g(0)\int_{\mathbf{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{i<x,\xi>}d\xi=f(x)\int_{\mathbf{R}^n}\hat{g}(y)dy$$

取 $g(x)=\exp(-|x|^2/2)$ 并注意到

$$\hat{g}(y)=(2\pi)^{n/2}\exp\left(-\frac{|y|^2}{2}\right)$$

以及(Gauss 积分)

$$\int_{\mathbf{R}^n}exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)dx=(2\pi)^{n/2}$$

则有

$$(2\pi)^n f(x)=\int_{\mathbf{R}^n}e^{i<x,\xi>}\hat{f}(\xi)d\xi$$

证毕

**定义 1.9.3** 设 X、Y 是局部凸线性拓扑空间.A: X→Y 是连续线性映照,如果对于 X 中的每个开集 G,其像 A(G)是 A(X)中的开集(其中 A(X)赋以由 Y 导出的拓扑),且 A 是一对一及满的,即 A(X)=Y,则称 A 为拓扑同构.

**推论 1.9.1** Fourier 变换确定一个从 $\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$到 $\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$上的拓扑同构.

它由定理 1.9.1 及定理 1.9.2 可直接得出.

性质(3) 若 $f,g\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$,则

$$\int_{\mathbf{R}^n}\hat{f}\,gd\xi=\int_{\mathbf{R}^n}f\,\hat{g}d\xi \tag{1.9.6}$$

事实上,只须在(1.9.5)中令 $x=0$ 即得.

性质(4) (Parseval 公式)若 $\forall f,g\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$,则

$$\int_{\mathbf{R}^n}f\,\bar{g}dx=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}Ff\overline{Fg}d\xi \tag{1.9.7}$$

事实上,利用性质(3),(1.9.3)及 Fourier 反演公式,可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} Ff\ \overline{Fg}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f\ F(\overline{Fg})dx$$

$$= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f\ \overline{F^{-1}(Fg)}dx$$

$$= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f\ \bar{g}dx.$$

性质(5) 卷积的 Fourier 变换. 若 $f, g \in \tilde{S}(\mathbb{R}^n)$,则有

$$\widehat{f*g} = \hat{f}\ \hat{g} \tag{1.9.8}$$

由 Fubini 定理有

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>}(f*g)(x)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>}\{\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy\}dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x-y,\xi>}e^{-i<y,\xi>}f(y)g(x-y)dxdy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<y,\xi>}\ \{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x-y,\xi>}g(x-y)dx\}\ f(y)dy$$

$$= \hat{g}(\xi)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<y,\xi>}f(y)dy = \hat{f}(\xi)\ \hat{g}(\xi)$$

性质(6) 乘积的 Fourier 变换. 若 $f,g \in \tilde{S}(\mathbb{R}^n)$,则有

$$\widehat{f\,g} = (2\pi)^{-n}\hat{f}*\hat{g} \tag{1.9.9}$$

利用 Fourier 反演公式和 Fubini 定理,得

$$\widehat{f\cdot g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>}f(x)g(x)dx$$

$$= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>}g(x)\ \{\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\eta>}\hat{f}(\eta)d\eta\}\ dx$$

$$= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi-\eta>}g(x)\hat{f}(\eta)dxd\eta$$

$$= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\ \{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi-\eta>}g(x)dx\}\ \hat{f}(\eta)d\eta$$

$$= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{g}(\xi-\eta)\hat{f}(\eta)d\eta$$

$$= (2\pi)^{-n}(\hat{f}*\hat{g})(\xi)$$

如果我们定义

$$\overline{\overline{f}}(x)=f(-x) \tag{1.9.10}$$

则由 Fourier 反演公式(定理 1.9.2)有

性质(7) $\forall f\in\tilde{S}(R^n)$,有

$$(2\pi)^{-n}F(Ff)(x)=\overline{\overline{f}}(x) \tag{1.9.11}$$

2° 缓增广义函数的 Fourier 变换

在 1° 中已知 Fourier 变换是一个从$\tilde{S}(R^n)$到$\tilde{S}(R^n)$上的同构.这就使得我们可以利用对偶性来定义缓增广义函数的 Fourier 变换.

定义 1.9.4 设 $T\in S'(R^n)$,它的 Fourier 变换是缓增广义函数 F$T$,其定义如下:

$$<FT,\psi>=<T,F\psi> \qquad \forall\psi\in\tilde{S}(R^n) \tag{1.9.12}$$

由 (1.9.12) 定义的从 $S'(R^n)$ 到 $S'(R^n)$ 内的映射是同构 $F$: $\tilde{S}(R^n)\to\tilde{S}(R^n)$ 的伴随算子. 当 $T_f$ 是由 $f\in\tilde{S}(R^n)$ 所确定的缓增广义函数时,由性质 (3) 可知,(1.9.12) 和 (1.9.1) 是一致的,因此我们用同一个记号 $F$ 来表示$\tilde{S}(R^n)$ 中的元素 $f$ 的 Fourier 变换 $Ff$( 或$\hat{f}$) 或者缓增广义函数 $T$ 的 Fourier 变换 $FT$( 或$\hat{T}$)

例2 如果$f\in L^1(R^n)$,则

$$\hat{T}_f=T_{\hat{f}},\text{其中}\hat{f}(\xi)=\int_{R^n}e^{-i<x,\xi>}f(x)dx.$$

事实上,只要在

$$\begin{aligned}<\hat{T}_f,\psi>&=\int_{R^n}f(x)\hat{\psi}(x)dx\\&=\int_{R^n}f(x)\ \{\int_{R^n}e^{-i<x,\xi>}\psi(\xi)d\xi\}\ dx\end{aligned}$$

中交换积分次序就可以看出本命题是正确的.

在上述意义下,缓增广义函数的 Fourier 变换是急降函数的 Fourier 变换的推广.同样,我们利用对偶性来定义缓增广义函数

的 Fourier 逆变换.

**定义 1.9.5** 设 $T\in S'(\mathbf{R}^n)$,它的 Fourier 逆变换为

$$<F^{-1}T,\psi> = <T,F^{-1}\psi> \qquad \forall\psi\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n) \tag{1.9.13}$$

由(1.9.12)定义的缓增广义函数的 Fourier 变换有如下性质:

**性质(1)** 它是线性的

**性质(2)** $F^{-1}(FT)=T$

**性质(3)** 设 $T\in S'(\mathbf{R}^n)$, 则 $F(ix_jT)=-\partial\hat{T}/\partial\xi_j$.

事实上,由急降函数Fourier变换性质(2),$\forall\psi\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$有

$$\begin{aligned}<\widehat{ix_jT},\psi> &= <ix_jT,\hat{\psi}> = <T,ix_j\hat{\psi}>\\ &= <T,(-\partial\hat{\psi}/\partial\xi_j)> = <\hat{T},\partial\psi/\partial\xi_j>\\ &= -<\partial\hat{T}/\partial\xi_j,\psi>\end{aligned}$$

**性质(4)** $F(\partial T/\partial x_j)=i\xi_j\hat{T}$.

事实上,由急降函数的 Fourier 变换性质(1),$\forall\psi\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$有

$$\begin{aligned}<(\widehat{\partial T/\partial x_j}),\psi> &= <\partial T/\partial x_j,\hat{\psi}> = -<T,\partial\hat{\psi}/\partial x_j>\\ &= -<T,-i\widehat{\xi_j\psi}> = <i\xi_j\hat{T},\psi>\end{aligned}$$

**定理 1.9.3** Fourier 变换建立了 $S'(\mathbf{R}^n)$ 到 $S'(\mathbf{R}^n)$ 的同构对应关系.

**证** 线性同构是显然的. 为说明拓扑同构, 我们考察广义函数序列 $\{T_n\}\subset S'(\mathbf{R}^n)$, 且按 $S'(\mathbf{R}^n)$ 的拓扑, 有 $T_n\to 0$, 由

$$<FT_n,\psi> = <T_n,F\psi> \qquad \forall\psi\in\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$$

以及 Fourier 变换建立了$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$到$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$的同构对应的事实可得出 $<T_n,F\psi>\to 0$, 从而 $<FT_n,\psi>\to 0$, 即 Fourier 变换是 $S'(\mathbf{R}^n)$的线性连续映射.同理也可证Fourier逆变换也是$S'(\mathbf{R}^n)$ 到 $S'(\mathbf{R}^n)$ 的线性连续映射. 从而 Fourier 变换建立了 $S'(\mathbf{R}^n)$到$S'(\mathbf{R}^n)$同构关系. 证毕.

在Fourier变换的古典理论中,曾经证明了当$f\in L^2(\mathbf{R}^n)$时

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}e^{-i<x,\xi>}f(x)\,dx$$

存在、并且$\hat{f}(\xi)\in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$,而映射

$$f\in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)\to \hat{f}\in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$$

是一个同构．另一方面，$\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)\subset \mathbf{S}'(\mathbf{R}^n)$(见定理 1.4.4),于是在广义函数的意义下，平方可积函数的 Fourier 变换存在．而在缓增广义函数的范围里，有下述定理:

**定理 1.9.4**(Plancherel 定理)　如果 $f\in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$,则 $T_f$ 的 Fourier 变换 $\hat{T}_f$ 可以用某一个函数 $\hat{f}\in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 给出，即

$$\hat{T}_f = T_{\hat{f}},\ \ \hat{f}\in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n) \tag{1.9.14}$$

并且还有 Parseval 公式

$$\|\hat{f}\|_{0,2,\mathbf{R}^n} = (2\pi)^{n/2}\|f\|_{0,2,\mathbf{R}^n} \tag{1.9.15}$$

证　利用 Schwarz 不等式及(1.9.7),可得

$$|<\hat{T}_f,\psi>| = |<T_f,\hat{\psi}>| = \left|\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\hat{\psi}(x)dx\right|$$

$$\leqslant \|f\|_{0,2,\mathbf{R}^n}\|\hat{\psi}\|_{0,2,\mathbf{R}^n} = (2\pi)^{n/2}\|f\|_{0,2,\mathbf{R}^n}\|\psi\|_{0,2,\mathbf{R}^n}$$

$$\forall \psi\in \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{R}^n) \tag{1.9.16}$$

此即 $\hat{T}_f$ 关于 $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 的范数是连续的，又 $\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{R}^n)$ 在 $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 中稠密，所以 $\hat{T}_f$ 也是 $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 上的线性连续泛函，而且由 $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 的 Riesz 定理知，存在唯一确定的 $\hat{f}\in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$,使得

$$<\hat{T}_f,\psi> = \int_{\mathbf{R}^n}\psi(x)\hat{f}(x)dx = <T_{\hat{f}},\psi>,$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}\hat{f}(x)\psi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\hat{\psi}(x)dx \quad \forall f\in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$$

以及 $\|\hat{T}_f\|_{0,2,\mathbf{R}^n} = \|\hat{f}\|_{0,2,\mathbf{R}^n} \leqslant (2\pi)^{n/2}\|f\|_{0,2,\mathbf{R}^n}$,从而有

$$\|F(Ff)\|_{0,2,\mathbf{R}^n} \leqslant (2\pi)^{n/2}\|\hat{f}\|_{0,2,\mathbf{R}^n} \leqslant (2\pi)^n\|f\|_{0,2,\mathbf{R}^n}$$

$$\forall f\in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n) \tag{1.9.17}$$

另一方面,由(1.9.11)知,$\forall \psi\in \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{R}^n)$有

$$\int_{\mathbf{R}^n} F(Ff)(x)\psi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n}\hat{f}(x)\hat{\psi}(x)dx$$

$$= (2\pi)^n \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\overline{\overline{\psi}}(x)\,dx = (2\pi)^n \int_{\mathbf{R}^n} f(-x)\psi(x)\,dx$$

从而 $F(Ff)(x) = (2\pi)^n f(-x)\,(a.e.)$, 因此 $\|F(Ff)\|_{0,2,\mathbf{R}^n} = (2\pi)^n \|f\|_{0,2,\mathbf{R}^n}$ 再由(1.9.17),则得到(1.9.15). 证毕.

广义函数意义下的 Fourier 变换,仍然可以把卷积运算转换为乘积运算,也可把乘积运算转换为卷积运算.

性质(5) $\forall \varphi \in \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{R}^n), T \in \mathbf{S}'(\mathbf{R}^n)$,则 $\varphi * T \in \mathbf{S}'(\mathbf{R}^n)$且

$$(\varphi \hat{*} T) = \hat{\varphi}\hat{T} \tag{1.9.18}$$

事实上,$\forall \psi \in \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{R}^n)$,有

$$< \varphi \hat{*} T, \psi > = < \varphi * T, \hat{\psi} > = << T_y, \varphi(x-y) >, \hat{\psi}(x) >$$

$$= < T_y, < \varphi(x-y), \hat{\psi}(x) >>$$

由(1.9.11)式,故

$$< \varphi \hat{*} T, \psi > = < T_y, (2\pi)^{-n}(F(F\varphi) * F\psi) >$$

$$= < T_y, F((F\varphi)\psi)(y) >$$

$$= < \hat{T}_y, \hat{\varphi}\ \psi > = < \hat{\varphi}\ \hat{T}, \psi >$$

从而得出(1.9.18).

性质(6) $\forall T \in \mathbf{S}'(\mathbf{R}^n), S \in \mathbf{E}'(\mathbf{R}^n)$,则

$$T \hat{*} S = \hat{T}\ \hat{S} \tag{1.9.19}$$

**定理 1.9.5** 设 $T \in E'(\mathbf{R}^n)$, 则它的 Fourier 变换是 $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的函数, 且

$$\hat{T}(\xi) = < T_x, e^{-i<x,\xi>} > \tag{1.9.20}$$

**证** 首先我们注意到 (1.9.20) 的右端是有意义的, 这是因为 $T$ 是有紧支集的广义函数, 而 $e^{-i<x,\xi>}$ 关于 $x$ 是 $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的函数, 由引理 1.7.2 类似的结论知, (1.9.20) 的右端关于 $\xi \in \mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的函数.

现在证明 (1.9.20) 式. 设 $\{\omega_\varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ 是正则化函数族, 由定理 1.8.8 知: (在$E'(\mathbf{R}^n)$内) $T * \omega_\varepsilon \to T$. 从而在 $\mathbf{S}'(\mathbf{R}^n)$ 内也

有 $T*\omega_\varepsilon \to T$ 以及$T\hat{*}\omega_\varepsilon \to \hat{T}$. 因为 $T*\omega_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 故

$$
\begin{aligned}
(T\hat{*}\omega_\varepsilon)(\xi) &= \int_{\mathbf{R}^n}(T*\omega_\varepsilon)(x)e^{-i<x,\xi>}dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} < T_y, \omega_\varepsilon(x-y) > e^{-i<x,\xi>}dx \\
&= < T_y, \int_{\mathbf{R}^n}\omega_\varepsilon(x-y)e^{-i<x,\xi>}dx > \\
&= < T_y, < \omega_\varepsilon(x-y), e^{-i<x,\xi>} > >
\end{aligned}
$$

但$<\omega_\varepsilon(x-y),e^{-i<x,\xi>}> \to e^{-i<y,\xi>}$,当$\varepsilon \to 0$时,有

$$
(T\hat{*}\omega_\varepsilon) \to < T_y, e^{-i<y,\xi>} >
$$

对于每个$\psi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,同样可证

$$
\begin{aligned}
&< (T\hat{*}\omega_\varepsilon), \psi > = < T*\omega_\varepsilon, < e^{-i<x,\xi>}, \psi(\xi) > > \\
&\to < T_x, < e^{-i<x,\xi>}, \psi(\xi) > > \\
&= < < T_x, e^{-i<x,\xi>} >, \psi(\xi) >
\end{aligned}
$$

因为已知$T\hat{*}\omega_\varepsilon \to \hat{T}$(在$S'(\mathbf{R}^n)$中),而极限是唯一的,故

$$
\hat{T} = < T_x, e^{-i<x,\xi>} >
$$

证毕.

例 3　$\delta$ 函数的 Fourier 变换

$$
\begin{aligned}
< \hat{T}_{\delta(x-a)}, \psi > &= < T_{\delta(x-a)}, \hat{\psi} > = \hat{\psi}(a) \\
&= \int_{\mathbf{R}^n}\psi(\xi)e^{-i<a,\xi>}d\xi \\
&= < e^{-i<a,\xi>}, \psi > = < T_{e^{-i<a,\xi>}}, \psi >
\end{aligned}
$$

所以

$$
\hat{T}_{\delta(x-a)} = T_{exp(-i<a,\xi>)}, \tag{1.9.21}
$$

特别,取 $a=0$,有

$$
\hat{T}_{\delta(x)} = T_1 \tag{1.9.22}
$$

例 4　函数 1 的 Fourier 变换

$$
< \hat{T}_1, \psi > = < T_1, \hat{\psi} > = \int_{\mathbf{R}^n}\hat{\psi}dx
$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} \psi e^{i<0,x>} dx$$
$$= (2\pi)^n \psi(0) = < (2\pi)^n T_\delta, \psi >$$

所以，

$$\hat{T}_1 = (2\pi)^n T_\delta. \tag{1.9.23}$$

例 5 sin $ax$ 的 Fourier 变换

由

$\sin ax = \frac{1}{2i}(e^{iax} - e^{-iax})$,则

$$< \hat{T}_{exp(iax)}, \psi > = < \exp(iax), \hat{\psi} >$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} e^{iax} \hat{\psi}(x) dx$$
$$= (2\pi)^n \psi(a) = < (2\pi)^n T_{\delta(\xi - a)}, \psi >$$

从而$\hat{T}_{\exp(iax)} = (2\pi)^n T_{\delta(\xi-a)}$,以及

$$\hat{T}_{\mathrm{Sin}ax} = \frac{1}{2i}(\hat{T}_{\exp(iax)} - \hat{T}_{\exp(-iax)})$$
$$= \frac{(2\pi)^n}{2i}(T_{\delta(\xi+a)} - T_{\delta(\xi-a)}) \tag{1.9.24}$$

**3°.Paley－Wiener(－Schwartz)定理**

**定义 1.9.5** 广义函数 $T \in \mathbf{E}'(\mathbf{R}^n)$的 Fourier－Laplace 变换是整解析函数：

$$\hat{T}(\zeta) = < T_x, e^{-<x,\zeta>} > \tag{1.9.25}$$

**定理 1.9.6** (1) 在 $\mathbf{R}^n$ 内有紧支集的广义函数 $T$ 的 Fourier－Laplace 变换是 K($n$ 维复数域)内的整函数 $F(\zeta)$，它满足下列性质：

存在常数 $c$ 和 $a$ 以及一个整数 $n$,使得

$$|F(\zeta)| \leqslant c(1+|\zeta|)^n \exp(a|\mathrm{Im}\zeta|), \forall \zeta \in \mathbf{K} \tag{1.9.26}$$

反之,K 内每个满足 (1.9.26) 的整函数也一定是某个属于 $\mathbf{E}'(\mathbf{R}^n)$ 的广义函数的 Fourier－Laplace 变换 .

(2) 在 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中的函数的 *Fourier－Laplace* 变换是 K

内满足下列性质的整函数 $F(\zeta)$:

存在常数 $a>0$,对每个整数 $n\geqslant 0$,能够找到一个常数 c,使得

$$|F(\zeta)|\leqslant c(1+|\zeta|)^{-n}\exp(a|\mathrm{Im}\zeta|),\forall\zeta\in\mathbf{K} \tag{1.9.27}$$

反之,K 内每个满足性质(1.9.27)的整函数也是 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$中某个函数的 Fourier - Laplace 变换.

**证** (1) 设

$$F(\zeta)=\langle T_x,e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\rangle$$

是广义函数 $T\in\mathrm{E}'(\mathbf{R}^n)$ 的 Fourier - Laplace 变换,由定理 1.4.3 知,存在常数 $c>0$,整数 $n\geqslant 0$ 和 $\mathbf{R}^n$ 的紧支集 $U$,使得 $\forall\psi\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 有

$$|\langle T,\psi\rangle|\leqslant c\sup_{\substack{|\alpha|\leqslant n\\ x\in U}}|\partial^\alpha\psi| \tag{1.9.28}$$

设$a$是一个正实数,使得紧支集$U\subset B_a=\{x\in\mathbf{R}^n:|x|\leqslant a\}$又

设$\psi_\zeta(x)=\exp(-i\langle x,\zeta\rangle)$,于是有

$$|\partial^\alpha\psi_\zeta(x)|\leqslant|\zeta|^{|\alpha|}\exp(\langle x,\eta\rangle)$$

因而

$$\sup_{\substack{|\alpha|\leqslant n\\ |x|\leqslant a}}|\partial^\alpha\psi_\zeta(x)|\leqslant\sup_{\substack{|\alpha|\leqslant n\\ |x|\leqslant a}}|\zeta|^{|\alpha|}\exp(\langle x,\eta\rangle)$$

$$\leqslant(1+|\zeta|)^n\exp(a|\eta|) \tag{1.9.29}$$

由(1.9.28),(1.9.29)和 F(ζ)的定义,便得出(1.9.26).

(2) 设 F(ζ)是函数 $\psi\in C_0^\infty$ 的 Fourier - Laplace 变换,$a>0$ 使得 $\mathrm{supp}\psi\subset B_a$,对每个 $\alpha\in\mathbf{Z}_+^n$,有

$$i^{|\alpha|}\zeta^\alpha\hat{\psi}(\zeta)=\int_{\mathbf{R}^n}e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\partial^\alpha\psi dx$$

由这一关系式,我们有

$$|\zeta^\alpha\hat{\psi}(\zeta)|<c\ \exp(a|\eta|)$$

这表明,对每个整数 $n\geqslant 0$,有

$$(1+|\zeta|^2)^{n/2}|\hat{\psi}(\zeta)|\leqslant c\ \exp(a|\eta|) \tag{1.9.30}$$

利用不等式

$$0 < c_0 \leqslant \frac{(1+|\zeta|^2)^{n/2}}{(1+|\zeta|)^n} \leqslant c_1$$

就可得到(1.9.30)等价于(1.9.27).

(3).反之,假设性质(1.9.27)成立,并定义

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} F(\zeta)e^{i<x,\zeta>}d\zeta$$

即$f(x)$是 $F(\zeta)$的 Fourier 逆变换,$\zeta\in\mathbf{R}^n$.由(1.9.27)知上述积分是绝对收敛的.且

$$\partial^\alpha f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} F(\zeta)(i)^{|\alpha|}\zeta^\alpha e^{i<x,\zeta>}d\zeta$$

也绝对收敛.因此,$f(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

下面证明$f$有列紧支集.设 $\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbf{R}^n$ 是任意固定的一点.由假设,$F(\zeta)$是整函数并且满足(1.9.27),所以

$$f(x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} F(\zeta+i\eta)e^{i<x,\zeta+i\eta>}d\zeta$$

这里的积分是绝对收敛的.取 $N=n+1$,利用(1.9.27)得

$$|f(x)| \leqslant c(2\pi)^{-n}\exp(a|\eta| - <x,\eta>)\cdot \int_{\mathbf{R}^n}(1+|\zeta|)^{-n-1}d\zeta$$

于是

$$|f(x)| \leqslant c' \exp(a|\eta| - <x,\eta>)$$

如果在上述不等式中令 $\eta=tx$,则有

$$|f(x)| \leqslant c'\exp[-t(|x|^2-a|x|)]$$

若 $t\to+\infty$,则这一不等式表明: 当 $x\in\mathbf{R}^n$ 的模$|x|>a$ 时,$f(x)$必等于 0,因此 supp $f(x)\subset B_a$

(4) 最后,设 $F(\zeta)$是 K 内的整函数且满足性质(1.9.26).那么由(1.9.26)知,$F(\zeta),\zeta\in\mathbf{R}^n$,是一个在无限远处缓增的函数,于是,它在 $\mathbf{R}^n$ 内确定了一个缓增广义函数,它的 Fourier 逆变换是 $S'(\mathbf{R}^n)$的一个元素.我们要证明 T 在 $\mathbf{R}^n$ 内有紧支集.为此,设$\{\omega_j\}$,$j=1,2,\cdots$,

是 $C_0^\infty(R^n)$内的正则化序列,使得 $\omega_j$ 的支集包含在以原点为中心,以 $j^{-1}$ 为半径的球内.由(1.9.18)有

$$\widehat{T*\omega_j}=\hat{T}\hat{\omega}_j$$

由于$\hat{T}=F(\zeta)$ 满足(1.9.26),而每个$\hat{\omega}_j$ 满足在 (1.9.27) 中把 $a$ 换为 $a+j^{-1}$ 所得到的不等式.故$(T*\omega_j)\in C_0^\infty(R^n)$,supp $(T*\omega_j)\subset B_{a+j^{-1}}$.因此,作为序列$(T*\omega_j)$的极限的广义函数 $T$ 也必有紧支集,且 supp$T\subset B_a$. 证毕.

# 第二章　　空间$L^p(\Omega)$

第一章中已经引入并讨论了$L^p(\Omega)$空间的定义和一部分性质，本章要证明空间$L^p(\Omega)$的重要的基本性质，即完备性、一致凸性等．

## §2.1　空间$L^p(\Omega)$

在§1.2中，已经给出$L^p(\Omega)$空间的定义，对于空间$L^p(\Omega)$中的元素（即满足(1.2.3)的可测函数的等价类），引入加法和数乘运算，并注意到如果$u$，$v\in L^p(\Omega)$，则由于

$$|u(x)+v(x)|^p\leqslant(|u(x)|+|v(x)|)^p \leqslant 2^p(|u(x)|^p+|v(x)|^p)$$

得　$u+v\in L^p(\Omega)$，所以$L^p(\Omega)$是一个向量空间．

在§1.2中，还给出$L^p(\Omega)$空间的范数，即

$$\|u\|_{0,p,\Omega}=\left\{\int_\Omega |u(x)|^p dx\right\}^{1/p}\quad 1\leqslant p<\infty \tag{2.1.1}$$

$$\|u\|_{0,\infty,\Omega}=\operatorname{ess}\sup_{x\in\Omega}|u(x)|=\inf\{k:\ |u(x)|<k\} \tag{2.1.2}$$

由范数的定义及 Minkowski 不等式容易验证由(2.1.1)和(2.1.2)定义的$L^p(\Omega)$上的泛函是一个范数．

下面证明线性赋范空间$L^p(\Omega)$是完备的．

**定理2.1.1**　如果　$1\leqslant p\leqslant\infty$，则$L^p(\Omega)$是一个Banach空间．

**证**　只要证明若$\{u_n\}$是空间$L^p(\Omega)(1\leqslant p\leqslant\infty)$中的Cauchy序列，则在$L^p(\Omega)$中存在一个元素$u$，使得$\{u_n\}$在$L^p(\Omega)$中收敛于$u$.分两种情况:

(1)　设$1\leqslant p<\infty$，由于$\{u_n\}$是$L^p(\Omega)$中的Cauchy序

列，因而存在 $\{u_n\}$ 的一个子序列 $\{u_{n_j}\}$ 使得

$$\|u_{n_{j+1}}-u_{n_j}\|_{0,p,\Omega}\leqslant 1/2^j,\quad j=1,\ 2,\ \cdots$$

作函数

$$v_m(x)=|u_{n0}|+\sum_{j=1}^{m}|u_{n_{j+1}}-u_{n_j}|$$

因为对每一个 $x\in\Omega$，序列 $\{v_m\}$ 是单调上升的，所以

$$\lim_{m\to\infty}v_m(x)=v(x)$$

由 Levi 定理* 和 Minkowski 不等式，有

$$\int_\Omega(v(x))^p dx=\lim_{m\to\infty}\int_\Omega(v_m(x))^p dx$$

$$=\lim_{m\to\infty}\int_\Omega\left[|u_{n0}|+\sum_{j=1}^{m}|u_{n_{j+1}}-u_{n_j}|\right]^p dx$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\left\{\left[\int_\Omega|u_{n0}|^p dx\right]^{1/p}+\sum_{j=1}^{m}\left[\int_\Omega|u_{n_{j+1}}-u_{n_j}|^p dx\right]^{1/p}\right\}^p$$

$$\leqslant\left\{\left[\int_\Omega|u_{n0}|^p dx\right]^{1/p}+\sum_{j=1}^{\infty}1/2^j\right\}^p<\infty$$

因而 $v(x)$ 几乎处处有界，且 $v(x)\in L^p(\Omega)$. 由此得到函数序列

---

* levi 定理　定义在Ω上的可测正值函数序列 $\{u_n(x)\}$ 满足 $u_1(x)\leqslant u_2(x)\leqslant\cdots\leqslant u_n(x)\leqslant\cdots$，且 $u(x)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)$，则

$$\int_\Omega u(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n(x)dx$$

$\{u_{nm}(x)\}=\left\{u_{n0}+\sum_{j=1}^{m}(u_{nj+1}-u_{nj})\right\}$ 在 $\Omega$ 上几乎处处收敛到可测函数 $u(x)$，且 $u(x)\in L^p(\Omega)$.

现在证明$\{u_n\}$在 $L^p(\Omega)$中收敛于 $u(x)$.事实上，根据 Fatou 引理* 得

$$\int_\Omega |u_n(x)-u(x)|^p dx=\int_\Omega \lim_{m\to\infty}|u_n(x)-u_{nm}(x)|^p dx$$

$$\leqslant \liminf_{m\to\infty}\int_\Omega |u_n(x)-u_{nm}(x)|^p dx\leqslant \varepsilon^p$$

最后一个不等式利用$\{u_n\}$是 Cauchy 序列的性质.从而有对任意给定的 $\varepsilon>0$，当 n 充分大时，成立

$$\int_\Omega |u_n(x)-u(x)|^p dx<\varepsilon^p$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n(x)-u(x)|^p dx=0$$

(2) $p=\infty$时，$\{u_n\}$是 $L^p(\Omega)$中的 Cauchy 序列，则存在一个零测集 $A\subset\Omega$ 使得如果 $x\notin A$，则对一切 $n$, $m=1, 2, \cdots$

$$|u_n(x)|\leqslant \|u_n\|_{0,\infty,\Omega}$$

$$|u_n(x)-u_m(x)|\leqslant \|u_n-u_m\|_{0,\infty,\Omega}$$

因为$\{\|u_n\|_{0,\infty,\Omega}\}$在 R 中有界，$u_n$ 在 $\Omega\setminus A$ 上一致收敛于一个有界函数 $u$，对于 $x\in A$，令 $u(x)=0$，从而有 $u\in L^\infty(\Omega)$并且

---

* Fatou引理：若$\{u_n\}$是定义在$\Omega$上的非负可测函数序列，则

$$\int_\Omega\left(\liminf_{n\to\infty}u_n(x)\right)dx\leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega u_n(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{0,\infty,\Omega}=0$$

因此 $L^p(\Omega)(1\leqslant p\leqslant\infty)$是完备的. 证毕.

**推论 2.1.1** $L^p(\Omega)(1\leqslant p\leqslant\infty)$中的 Cauchy 序列必存在一个在 $\Omega$ 上几乎处处点收敛的子序列.

## § 2.2 Clarkson 不等式及 $L^p(\Omega)$的一致凸性

任何赋范空间关于其范数拓扑是局部凸的.

**定义 2.2.1** 赋范空间 X 上的范数称为一致凸的, 是指如果对每个满足 $0<\varepsilon\leqslant 2$ 的数 $\varepsilon$, 存在一个数 $\delta(\varepsilon)$, 使得若 $x$, $y\in X$ 且 $\|x\|_X=\|y\|_X=1$, 和 $\|x-y\|_X\geqslant\varepsilon$, 有 $\|(x+y)/2\|_X\leqslant 1-\delta(\varepsilon)$.此时相应的赋范空间 X 称为一致凸的.

在 Hilbert 空间 X 中

$$\|x\|_X^2=(x, x)_X \tag{2.2.1}$$

由平行四边形定律

$$\|x+y\|_X^2+\|x-y\|_X^2=2\|x\|_X^2+2\|y\|_X^2 \tag{2.2.2}$$

可知 Hilbert 空间是一致凸的.

本节中, 我们要证明对于 $1<p<\infty$, 空间 $L^p(\Omega)$是一致凸的, 即其范数满足定义 2.2.1 中的条件.它可以通过 $L^p(\Omega)$的一组不等式来得到, 这组不等式推广了 $L^2(\Omega)$中的平行四边形定律, 它们是研究 $L^p(\Omega)$空间一些重要性质的工具.为了证明这些不等式, 我们需要下面的引理.

**引理 2.2.1** 如果 $1\leqslant p<\infty$且 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, 则

$$(a+b)^p\leqslant 2^{p-1}(a^p+b^p) \tag{2.2.3}$$

**证** 如果 $a=0$, (2.2.3) 式显然成立.如果 $a>0$, (2.2.3) 式

可改写为

$$(1+x)^p \leqslant 2^{p-1}(1+x^p) \tag{2.2.4}$$

其中 $0 \leqslant x = b/a$. 函数 $f(x) = (1+x)^p/(1+x^p)$ 满足

$f(0) = 1 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 而且当 $0 < x < \infty$ 时，$f(x) > 1$. 因此对于 $x \geqslant 0$，$f$ 在其仅有的一个临界点 $x = 1$ 上取得 $f$ 的最大值. 由于 $f(1) = 2^{p-1}$，即得 (2.2.4) 式. 证毕.

**引理 2.2.2** 如果 $0<s<1$，则函数 $f(x)=(1-s^x)/x$ 是 $x>0$ 的递减函数.

**证** $f^{(1)}(x)=(1/x^2)(g(s^x)-1)$，其中 $g(t)=t-t\ln t$，因为 $0<s^x<1$，又因为对于 $0<t\leqslant 1$，$g^{(1)}(t)=-\ln t\geqslant 0$，由此得到 $g(s^x)<g(1)=1$，因此 $f^{(1)}(x)<0$. 证毕.

**引理 2.2.3** 如果 $1<p\leqslant 2$ 且 $0\leqslant t\leqslant 1$，则

$$\left|\frac{1+t}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{1-t}{2}\right|^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t^p\right)^{1/(p-1)} \tag{2.2.5}$$

其中 $p'=p/(p-1)$ 是 $p$ 的共轭指数.

**证** 如果 $p=2$ 或 $t=0$ 或 $t=1$，(2.2.5) 中等号显然成立，故可以设 $1<p<2$ 和 $0<t<1$.变换 $t=(1-s)/(1+s)$ 把区间 $0<t<1$ 映到区间 $0<s<1$ 上，把 (2.2.5) 化为等价的不等式

$$\frac{1}{2}[(1+s)^p+(1-s)^p]-(1+s^{p'})^{p-1}\geqslant 0 \tag{2.2.6}$$

记

$$\binom{p}{0}=1 \quad 和 \binom{p}{k}=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!},\ k\geqslant 1$$

将(2.2.6)左端展开为幂级数.即

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}s^{k}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(-s)^{k}-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k}s^{p'k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{2k}s^{2k}-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k}s^{p'k}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\binom{p}{2k}s^{2k}-\binom{p-1}{2k-1}s^{p'(2k-1)}-\binom{p-1}{2k}s^{2p'k}\right\}$$

对于 $0\leqslant s\leqslant 1$，这一级数是收敛的.只要证明对于 $0<s<1$，级数中的每一项都是正的则可得(2.2.6).第 $k$ 项可以写成

$$\frac{p(p-1)(2-p)(3-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k)!}s^{2k}$$

$$-\frac{(p-1)(2-p)(3-p)\cdots(2k-1-p)}{(2k-1)!}s^{p'(2k-1)}$$

$$+\frac{(p-1)(2-p)\cdots(2k-p)}{(2k)!}s^{2kp'}$$

$$=\frac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!}s^{2k}$$

$$\cdot\left[\frac{p(p-1)}{2k(2k-p)}-\frac{p-1}{2k-p}s^{p'(2k-1)-2k}+\frac{p-1}{2k}s^{2kp'-2k}\right]$$

$$=\frac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!}s^{2k}$$

$$\cdot\left[\frac{1-s^{(2k-p)/(p-1)}}{(2k-p)/(p-1)}-\frac{1-s^{2k/(p-1)}}{2k/(p-1)}\right]$$

由于 $p<2$，上式右端第一个因子是正的，又由 $0<(2k-p)/(p-1)<2k/(p-1)$，及引理 2.2.2，右端第二个因子也是正的，于是就证明了(2.2.6)式，从而得到(2.2.5)式. 证毕.

**引理 2.2.4** 设 $z$，$w\in \mathbf{C}$(复数域)，如果 $1<p\leqslant 2$，则

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{z-w}{2}\right|^{p'}\leqslant\left(\frac{1}{2}|z|^{p}+\frac{1}{2}|w|^{p}\right)^{1/(p-1)} \qquad (2.2.7)$$

其中 $p'=p/(p-1)$.如果 $2\leqslant p<\infty$，则

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^p+\left|\frac{z-w}{2}\right|^p\leqslant\frac{1}{2}|z|^p+\frac{1}{2}|w|^p \tag{2.2.8}$$

**证** 当 $z=0$ 或 $w=0$ 时，(2.2.7)显然成立，而且(2.2.7)对于 $z$ 和 $w$ 是对称的.设 $|z|\geqslant|w|>0$，这时能把(2.2.7)重写为

$$\left|\frac{1+re^{i\theta}}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{1-re^{i\theta}}{2}\right|^{p'}\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r^p\right)^{1/(p-1)} \tag{2.2.9}$$

其中 $w/z=re^{i\theta}$，$r\geqslant0$，$0\leqslant\theta<2\pi$.如果 $\theta=0$，那么(2.2.9)就是引理 2.2.2 的结论.我们证明，对于固定的 $r$，函数

$$f(\theta)=|1+re^{i\theta}|^{p'}+|1-re^{i\theta}|^{p'}$$

在 $\theta=0$ 处有一个最大值.利用这一结果来完成(2.2.9)式的证明，因为

$$f(\theta)=(1+r^2+2r\cos\theta)^{p'/2}+(1+r^2-2r\cos\theta)^{p'/2}$$

显然有 $f(2\pi-\theta)=f(\pi-\theta)=f(\theta)$，所以只要在区间 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ 研究 $f$ 就行了.由于 $p'\geqslant2$，在这个区间上，有

$$\begin{aligned}f'(\theta)=&-p'r\sin\theta[(1+r^2+2r\cos\theta)^{(p'/2)-1}\\&-(1+r^2-2r\cos\theta)^{(p'/2)-1}]\leqslant0\end{aligned}$$

因此 $f$ 在 $\theta=0$ 处达到最大值，(2.2.9)得证.

如果 $2\leqslant p<+\infty$，则 $1<p'\leqslant2$，在 (2.2.7) 式中交换 $p$ 和 $p'$ 并利用引理 2.2.1，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{z+w}{2}\right|^p+\left|\frac{z-w}{2}\right|^p&\leqslant\left(\frac{1}{2}|z|^{p'}+\frac{1}{2}|w|^{p'}\right)^{1/(p'-1)}\\&=\left(\frac{1}{2}|z|^{p'}+\frac{1}{2}|w|^{p'}\right)^{p/p'}\\&\leqslant2^{(p/p')-1}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{p/p'}|z|^p+\left(\frac{1}{2}\right)^{p/p'}|w|^p\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}|z|^p+\frac{1}{2}|w|^p$$

从而(2.2.8)成立．证毕.

**定理 2.2.4** (Clarkson 不等式) 设 $u,v\in \mathbf{L}^p(\Omega)$，$p'=p/(p-1)$，$\forall 1<p<\infty$.如果 $2\leqslant p<\infty$，则

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^p+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^p \leqslant \frac{1}{2}\|u\|_{0,p,\Omega}^p+\frac{1}{2}\|v\|_{0,p,\Omega}^p \tag{2.2.10}$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^{p'}+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^{p'} \geqslant \left(\frac{1}{2}\|u\|_{0,p,\Omega}^p+\frac{1}{2}\|v\|_{0,p,\Omega}^p\right)^{p'-1} \tag{2.2.11}$$

如果 $1<p\leqslant 2$，则

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^{p'}+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2}\|u\|_{0,p,\Omega}^p+\frac{1}{2}\|v\|_{0,p,\Omega}^p\right)^{p'-1} \tag{2.2.12}$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^p+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^p \geqslant \frac{1}{2}\|u\|_{0,p,\Omega}^p+\frac{1}{2}\|v\|_{0,p,\Omega}^p \tag{2.2.13}$$

**证** 对于 $2\leqslant p<\infty$，在(2.2.8)式中取 $z=u(x)$和 $w=v(x)$并在 $\Omega$ 上积分就得到(2.2.10).为了对 $1<p\leqslant 2$ 证明(2.2.12)式，我们首先注意到对于任何 $u\in \mathbf{L}^p(\Omega)$，$\||u|^{p'}\|_{0,p-1,\Omega}=\|u\|_{0,p,\Omega}^{p'}$，利用

相应于指数 $p-1<1$ 的逆 Minkowski 不等式* 和 $z=u(x)$, $w=v(x)$的(2.2.7)式，有

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^{p'}+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^{p'}\\
&\quad=\left\|\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1,\Omega}+\left\|\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\right\|_{0,p-1,\Omega}\\
&\quad\leqslant\left(\int_\Omega\left(\left|\frac{u(x)+v(x)}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{u(x)-v(x)}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1}dx\right)^{1/(p-1)}\\
&\quad\leqslant\left(\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|u(x)|^p+\frac{1}{2}|v(x)|^p\right)dx\right)^{p'-1}\\
&\quad=\left(\frac{1}{2}\|u\|_{0,p,\Omega}^p+\frac{1}{2}\|v\|_{0,p,\Omega}^p\right)^{p'-1},
\end{aligned}
$$

此即(2.2.12).

对于 $2\leqslant p<\infty$，能用与证明(2.2.12)同样的方法来证明(2.2.11)，不过要用相应于 $p-1\geqslant 1$ 的 Minkowski 不等式** 来代替逆不等式，用不等式

$$
\left(\left|\frac{\xi+\eta}{2}\right|^{p'}+\left|\frac{\xi-\eta}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1}\geqslant\frac{1}{2}|\xi|^p+\frac{1}{2}|\eta|^p
$$

来代替(2.2.7).即在(2.2.7)式中用 $p'$代替 $p$，$\xi+\eta$ 代替 $z$，$\xi-\eta$ 代替 $w$ 就可以得到这个不等式.最后，能够从(2.2.8)的一个类似的修正得到(2.2.13). 证毕.

---

* 逆Minkowski不等式　设$0<p<1$，如果$u,v\in L^p(\Omega)$，则

$$\||u|+|v|\|_{0,p,\Omega}\geqslant\|u\|_{0,p,\Omega}+\|v\|_{0,p,\Omega}$$

** Minkowski 不等式　设$1\leqslant p<\infty$，则

$$\|u+v\|_{0,p,\Omega}\leqslant\|u\|_{0,p,\Omega}+\|v\|_{0,p,\Omega}$$

当 $p=2$ 时定理 2.2.4 中的 Clarkson 不等式与平行四边形定律(2.2.2)是一致的.

**推论 2.2.1** 如果 $1<p<\infty$，则 $L^p(\Omega)$是一致凸的.

**证** 设 $u,v\in L^p(\Omega)$满足 $\|u\|_{0,p,\Omega}=\|v\|_{0,p,\Omega}=1$ 和 $\|u-v\|_{0,p,\Omega}\geqslant\varepsilon>0$.

如果 $2\leqslant p<\infty$，由(2.2.10)有

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^{p}\leqslant 1-\frac{\varepsilon^p}{2^p}$$

如果 $1<p\leqslant 2$，由(2.2.12)有

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^{p'}\leqslant 1-\frac{\varepsilon^{p'}}{2^{p'}}$$

这两种情况中都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得

$$\left\|\frac{(u+v)}{2}\right\|_{0,p,\Omega}\leqslant 1-\delta$$

证毕.

在§1.8 中，我们曾讨论了空间 $C_0(\Omega)$和 $C_0^\infty(\Omega)$在 $L^p(\Omega)$中的稠密性(见定理 1.8.4 和 1.8.6)，在此基础上，我们讨论 $L^p(\Omega)$的可分性.

**定理 2.2.5** 如果 $1\leqslant p<\infty$，则 $L^p(\Omega)$是可分的.

**证** 设 $\Omega$ 是 $R^n$ 中开集，$\partial\Omega$ 是 $\Omega$ 的边界，对每一正整数 $m$，作区域

$\Omega_m=\{x\in\Omega:\ \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)>1/m$，且$|x|<m\}$，容易证明

$$C_0(\Omega)=\bigcup_{m=1}^{\infty}C_0(\Omega_m)\qquad(2.2.14)$$

记 P 是系数为有理数的多项式全体，而

$$P_m=\{\chi_{\Omega_m}f:\ f\in P\}\ ,\qquad(2.2.15)$$

这里 $\chi_{\Omega m}$ 是 $\Omega_m$ 上的特征函数，即

$$\chi_{\Omega_m}=\begin{cases}1, & x\in\Omega_m\\ 0, & x\notin\Omega_m\end{cases},$$

显然，$C_0(\Omega)$和 $P_m$ 都是 $L^p(\Omega)$中的子集.

如果 $u\in L^p(\Omega)$，对任给的 $\varepsilon>0$，由定理 1.8.4 知，存在函数 $\varphi\in C_0(\Omega)$，使得 $\|u-\varphi\|_{0,p,\Omega}<\varepsilon/2$. 由(2.2.14)知 $\varphi$ 属于某一个 $C_0(\Omega_m)$，只要

$$1/m<\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi,\ \partial\Omega)$$

由 Weierstrass 定理(见定理 1.2.1 的推论)知 $P_m$ 在 $C_0(\Omega_m)$中稠密，即存在 $f\in P_m$，使得

$$\|\varphi-f\|_{0,\infty,\Omega_m}<\frac{\varepsilon}{2}[\mu(\Omega_m)]^{-1/p}$$

因为 $\Omega_m$ 是一有界集合，从而有

$$\|\varphi-f\|_{0,p,\Omega}=\left[\int_\Omega|\varphi-f|^p dx\right]^{1/p}$$

$$=\left[\int_{\Omega_m}|\varphi-f|^p dx\right]^{1/p}<\varepsilon/2$$

由此可知对任给 $\varepsilon>0$，存在 $f\in\bigcup_{m=1}^{\infty}P_m$ 满足

$$\|u-f\|_{0,p,\Omega}<\varepsilon,$$

故 $\bigcup_{m=1}^{\infty}P_m$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密，由于 $P_m$ 是可数集，$\bigcup_{m=1}^{\infty}P_m$ 也是可数的，从而 $L^p(\Omega)$ 是可分的．证毕．

必须注意 $L^\infty(\Omega)$不是可分的.

$L^p(\Omega)$空间还有一个很重要的性质，这就是插值定理，我们不加证明地加以叙述.

定理 2.2.6 (Riesz – Thorin 插值定理) 设 $p_0\neq p_1$，$q_0$

$\neq q_1$，$T\in L(\mathbf{L}^{p_0}(\Omega),\ \mathbf{L}^{q_0}(\Omega))$，其算子范数为 $M_0$；
同时 $T\in L(\mathbf{L}^{p_1}(\Omega),\ \mathbf{L}^{q_1}(\Omega))$，其算子范数为 $M_1$.
则 $T\in L(\mathbf{L}^{p}(\Omega),\ \mathbf{L}^{q}(\Omega))$，且算子范数 $M$ 满足

$$M\leqslant M_0^{1-\theta}\cdot M_1^{\theta}.$$

只要 $0<\theta<1$ 以及 $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{p_0}+\dfrac{\theta}{p_1}$，$\dfrac{1}{q}=\dfrac{1-\theta}{q_0}+\dfrac{\theta}{q_1}$ 成立.

## §2.3 空间 $\mathbf{L}^p(\Omega)$的赋范对偶

这一节要讨论 $\mathbf{L}^p(\Omega)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 上线性泛函的表示形式. 用 $(\mathbf{L}^p(\Omega))'$ 表示 $\mathbf{L}^p(\Omega)$ 上线性泛函全体，$p$，$p'$ 是一对共轭指数，即 $1/p+1/p'=1$.

对于每个元素 $v\in\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$，由

$$l_v(u)=\int_\Omega u(x)v(x)dx\quad\forall u\in\mathbf{L}^p(\Omega)\tag{2.3.1}$$

来定义一个 $\mathbf{L}^p(\Omega)$上的线性泛函 $l_v$，根据 Hoelder 不等式

$$|l_v(u)|\leqslant\|u\|_{0,p,\Omega}\|v\|_{0,p',\Omega}$$

从而 $l_v\in(\mathbf{L}^p(\Omega))'$，而且

$$\|l_v\|_{(\mathbf{L}^p(\Omega))'}\leqslant\|v\|_{0,p',\Omega}\tag{2.3.2}$$

设 $v_1$，$v_2$ 是 $\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$ 中两个不同元素，则由 (2.3.1) 确定的两个线性泛函 $l_{v_1}$，和 $l_{v_2}$ 是不同的. 实际上，如果结论不对，即 $l_{v_1}$ 和 $l_{v_2}$ 相同，则

$$\int_\Omega v_1 u dx=\int_\Omega v_2 u dx\qquad\forall u\in L^p(\Omega),$$

即

$$\int_\Omega(v_1-v_2)u dx=0\qquad\forall u\in L^p(\Omega)\tag{2.3.3}$$

设 $1<p<\infty$，作函数

$$u_{12}=|v_1-v_2|^{p'-2}(\overline{v_1-v_2}) \tag{2.3.4}$$

显然，$u_{12}\in L^p(\Omega)$，用 $u_{12}$ 代替(2.3.3)中 $u$ 有

$$\begin{aligned}0&=\int_\Omega(v_1-v_2)|v_1-v_2|^{p'-2}(\overline{v_1-v_2})dx\\&=\int_\Omega|v_1-v_2|^{p'}dx\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

于是 $v_1=v_2$ $(a.e.)$，但这是不可能的，因而 $l_{v_1}$ 和 $l_{v_2}$ 不同．类似地可证，当 $p=1$ 时，$l_{v_1}$ 和 $l_{v_2}$ 不同．于是 $L^{p'}(\Omega)$ 中的元素通过 (2.3.1) 与 $(L^p(\Omega))'$ 中的一个子集建立一一对应关系．但是 $L^{p'}(\Omega)$ 能否通过 (2.3.1) 同整个 $(L^p(\Omega))'$ 建立一一对应关系？即 $(L^p(\Omega))'$ 能否用 (2.3.1) 的形式来表示？我们要证在 $1\leqslant p<\infty$ 时，确实是这样的．

**引理 2.3.1** 设 $1<p<\infty$，$l\in(L^p(\Omega))'$且

$$\|l\|_{(L^p(\Omega))'}=1$$

则存在唯一的 $\omega\in L^p(\Omega)$，使得 $\|\omega\|_{0,p,\Omega}=l(\omega)=1$.

证 根据假设 $\sup\limits_{\|u\|_{0,p,\Omega}=1}|l(u)|=1$，知在 $L^p(\Omega)$ 中存在一个序列 $\{u_n\}$ 满足

$$\|u_n\|_{0,p,\Omega}=1 \tag{2.3.6}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}l(u_n)=1 \tag{2.3.7}$$

现在证明 $\{u_n\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列.用反证法，如不然，必定存在某一正数 $\varepsilon_0>0$，以及 $\{u_n\}$ 的两个子序列 $\{u_{nk}\}$ 和 $\{u_{mk}\}$ 满足关系

$$\|u_{nk}-u_{mk}\|_{0,p,\Omega}>\varepsilon_0, \tag{2.3.8}$$

把 Clarkson 不等式应用到每一对函数 $u_{nk}$ 和 $u_{mk}$ 上，当 $p\geqslant2$

时，由(2.2.10)式有

$$\left\|\frac{u_{nk}+u_{mk}}{2}\right\|_{o,p,\Omega}^{p}+\left\|\frac{u_{nk}-u_{mk}}{2}\right\|_{o,p,\Omega}^{p}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2}\|u_{nk}\|_{o,p,\Omega}^{p}+\frac{1}{2}\|u_{mk}\|_{o,p,\Omega}^{p}\right)=1 \tag{2.3.9}$$

当 $1<p\leqslant 2$ 时，由(2.2.12)得

$$\left\|\frac{u_{nk}+u_{mk}}{2}\right\|_{o,p,\Omega}^{p'}+\left\|\frac{u_{nk}-u_{mk}}{2}\right\|_{o,p,\Omega}^{p'}\leqslant 1 \tag{2.3.10}$$

由于 $\left\|\frac{u_{nk}-u_{mk}}{2}\right\|_{o,p,\Omega}\geqslant \varepsilon_0/2$，由 (2.3.9) 和 (2.3.10) 知，存在一个与 $k$ 无关的数 $\eta\in(0,1)$ 满足

$$\left\|\frac{u_{nk}+u_{mk}}{2}\right\|_{o,p,\Omega}<1-\eta.$$

在序列 $\{(u_{nk}+u_{mk})/2\}$ 中只可能出现有限个函数为零，否则子序列 $\{u_{nk}\}$ 和 $\{u_{mk}\}$ 不可能满足(2.3.7).把是零的函数除去，仍用 $\{(u_{nk}+u_{mk})/2\}$ 来表示这个序列.作函数

$$U_k=\frac{u_{nk}+u_{mk}}{\|u_{nk}+u_{mk}\|_{o,p,\Omega}},\quad k=1,2,\cdots$$

显然 $\|U_k\|_{o,p,\Omega}=1$，且有

$$l(U_k)=\frac{1}{2}[l(u_{nk})+l(u_{mk})]\frac{1}{\left\|\frac{u_{nk}+u_{mk}}{2}\right\|_{o,p,\Omega}}$$

$$\geqslant\frac{1}{2(1-\eta)}[l(u_{nk})+l(u_{mk})]$$

由(2.3.7)得

$$\lim_{k\to\infty}\inf\ l(U_k)\geqslant\frac{1}{1-\eta}>1 \tag{2.3.11}$$

因而至少存在一个 $k_0$，函数 $U_{k0}$ 的范数为 1，而 $l(U_{k0})>1$，

这与 $\sup\limits_{\|u\|_{o,p,\Omega}=1}|l(u)|=1$ 矛盾．所以$\{u_n\}$是 Caucly 序列．

由 $\mathbf{L}^p(\Omega)$ 的完备性，$\{u_n\}$ 在 $\mathbf{L}^p(\Omega)$ 中收敛于某一函数 $\omega \in \mathbf{L}^p(\Omega)$，显然 $\|\omega\|_{o,p,\Omega}=1$ 和 $l(\omega)=1$. 函数 $\omega$ 满足定理的要求．

现在证明唯一性．如果不唯一，则另外存在一个序列 $\{\tilde{u}_n\}$ 满足 $\|\tilde{u}_n\|_{o,p,\Omega}=1$，和 $\lim\limits_{n\to\infty} l(\tilde{u}_n)=1$，同时 $\{\tilde{u}_n\}$ 在 $\mathbf{L}^p(\Omega)$ 中收敛于$\tilde{\omega}(\neq\omega)$. 把一对序列$\{u_n\}$和 $\{\tilde{u}_n\}$ 看作上面已讨论过的一对序列$\{U_{nk}\}$和$\{U_{mk}\}$，进行由 (2.3.8) 至 (2.3.11) 类似的讨论，同样会得出矛盾，从而证明了唯一性．证毕．

**引理 2.3.2** 如果 $1<p<\infty$且 $\omega\in \mathbf{L}^p(\Omega)$以及 $\|\omega\|_{o,p,\Omega}=1$，则存在唯一的 $l\in(\mathbf{L}^p(\Omega))'$，使得

$$\|l\|_{(\mathbf{L}^p(\Omega))'}=1 \quad 且 \quad l(\omega)=1.$$

**证** 若给了 $\omega\in \mathbf{L}^p(\Omega)$和 $\|\omega\|_{o,p,\Omega}=1$，则与(2.3.1)和(2.3.2)的推导类似，由

$$l_v(u)=\int_\Omega u(x)v(x)dx \qquad \forall u\in \mathbf{L}^p(\Omega) \tag{2.3.12}$$

定义的泛函 $l_v$ 满足 $l_v(\omega)=\|\omega\|^p_{o,p,\Omega}=1$，这里 $v(x)\in \mathbf{L}^{p'}(\Omega)$定义如下

$$v(x)=\begin{cases}|\omega(x)|^{p-2}\overline{\omega(x)} & 当\omega(x)\neq 0时\\ 0 & x在其它处,\end{cases}$$

现在证明 $l_v$ 就是引理所要找的 $l$. 先证明

$$\|l_v\|_{(\mathbf{L}^p(\Omega))'}=1$$

事实上，由(2.3.12)并利用 Hoelder 不等式，有

$$|l_v(u)| \leqslant \|v\|_{0,p',\Omega}\|u\|_{0,p,\Omega}.$$

于是

$$\|l_v\|_{(L^p(\Omega))'} \leqslant \|v\|_{0,p',\Omega} = 1 \tag{2.3.13}$$

作函数

$$V(x) = \begin{cases} |v(x)|^{p'-2}\overline{v(x)} & \text{当} v(x) \neq 0 \text{时} \\ 0 & x \text{在其它处}, \end{cases}$$

显然，$V(x) \in L^p(\Omega)$，$\|V\|_{0,p,\Omega} = \|v\|_{0,p',\Omega} = 1$，且

$$l_v(V) = \|v\|^{p'}_{0,p',\Omega} = 1 \tag{2.3.14}$$

由 (2.3.13) 和 (2.3.14) 得 $\|l_v\|_{(L^p(\Omega))'} = 1$，又因为 $V(x) = \omega(x)$，所以，这个 $l_v$ 就是引理中所要找的 $l$.

现在证明这样的 $l$ 是唯一的．用反证法，如果有两个不同的 $l_1$ 和 $l_2$ 满足引理的条件，那未必定有一个 $\tilde{\omega}(\neq 0) \in L^p(\Omega)$，使得

$$l_1(\tilde{\omega}) \neq l_2(\tilde{\omega}) \tag{2.3.15}$$

作函数 $W_0 = C_1\tilde{\omega} + C_2\omega$，其中 $C_1$ 和 $C_2$ 由方程

$$\begin{cases} l_1(C_1\tilde{\omega} + C_2\omega) - l_2(C_1\tilde{\omega} + C_2\omega) = 2 \\ l_1(C_1\tilde{\omega} + C_2\omega) = 1 \end{cases} \tag{2.3.16}$$

确定，解此方程得到

$$C_1 = \frac{2}{l_1(\tilde{\omega}) - l_2(\tilde{\omega})}, \quad C_2 = 1 - C_1 l_1(\tilde{\omega})$$

对任意实数 $t > 0$，作函数 $\omega + tW_0$，由 (2.3.16) 得到 $l_1(\omega + tW_0) = 1 + t$，利用 $\|l_1\|_{(L^p(\Omega))'} = 1$，有

$$\|\omega + tW_0\|_{0,p,\Omega} \geqslant 1 + t \tag{2.3.17}$$

且

$$l_2(\omega - tW_0) = 1 - t\ l_2(W_0) = 1 + t$$

同样有

$$\|\omega - tW_0\|_{0,p,\Omega} \geqslant 1 + t \tag{2.3.18}$$

分两种情况讨论：

(1) 如果 $1<p\leqslant 2$，利用 Clarkson 不等式(2.2.13)和(2.3.17)，(2.3.18)得

$$1+t^p\|W_0\|_{0,p,\Omega}^p=\left\|\frac{(\omega+tW_0)+(\omega-tW_0)}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^p$$

$$+\left\|\frac{(\omega+tW_0)-(\omega-tW_0)}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^p$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\|\omega+tW_0\|_{0,p,\Omega}^p+\frac{1}{2}\|\omega-tW_0\|_{0,p,\Omega}^p$$

$$\geqslant(1+t)^p \tag{2.3.19}$$

(2) 如果 $2\leqslant p<\infty$，利用 Clarkson 不等式(2.2.11)和(2.3.17)，(2.3.18)得

$$1+t^{p'}\|W_0\|_{0,p,\Omega}^{p'}=\left\|\frac{(\omega+tW_0)+(\omega-tW_0)}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^{p'}$$

$$+\left\|\frac{(\omega+tW_0)-(\omega-tW_0)}{2}\right\|_{0,p,\Omega}^{p'}$$

$$\geqslant\left(\frac{1}{2}\|\omega+tW_0\|_{0,p,\Omega}^p+\frac{1}{2}\|\omega-tW_0\|_{0,p,\Omega}^p\right)^{p'-1}$$

$$\geqslant(1+t)^{p'} \tag{2.3.20}$$

从推导过程来看，(2.3.19)、(2.3.20) 对一切 $t>0$ 成立．然而，(2.3.19)、(2.3.20) 不可能对一切 $t>0$ 成立，除非 $\|W_0\|_{0,p,\Omega}=0$. 但这是不可能的，因为由 (2.3.16) 知，
$l(W_0)=l(C_1\tilde{\omega}+C_2\omega)=1$，于是唯一性证得．证毕．

引理 2.3.3 设 $u\in\mathbf{L}^\infty(\Omega)$，则

$$l(v)=\int_\Omega uv\,dx \qquad \forall v\in\mathbf{L}^1(\Omega) \tag{2.3.21}$$

是$\mathbf{L}^1(\Omega)$上的线性泛函，且

$$\|l\|_{(\mathbf{L}^1(\Omega))'}=\|u\|_{0,\infty,\Omega} \tag{2.3.22}$$

**证** 由(2.3.21)定义的泛函具有可加性和连续性是显然的.

当 $\| u \|_{0,\infty,\Omega}=0$，即 $u(x)=0$ 时，(2.3.22)显然成立.因此设 $u(x)\neq 0$ 和 $\varepsilon\in(0,\| u \|_{0,\infty,\Omega})$，总存在 $\Omega$ 的一个子集 A $(0<\mu(A)<\infty)$满足

$$|u(x)|\geqslant \|u\|_{0,\infty,\Omega}-\varepsilon \quad , \quad \forall x\in A,$$

作函数

$$W_0(x)=\begin{cases}|u(x)|^{-1}\overline{u(x)} & x\in A,\\ 0 \quad , & x\notin A.\end{cases}$$

显然有 $W_0\in L^1(\Omega)$ ， $\| W_0 \|_{0,1,\Omega}=\mu(A)$，且

$$l(W_0)=\int_\Omega u(x)W_0(x)dx=\int_A u(x)|u(x)|^{-1}\overline{u(x)}dx$$

$$=\int_A |u(x)|dx\geqslant(\|u\|_{0,\infty,\Omega}-\varepsilon)\mu(A)$$

$$=(\|u\|_{0,\infty,\Omega}-\varepsilon)\|W_0\|_{0,1,\Omega}$$

于是

$$\|l\|_{(L^1(\Omega))'}\geqslant\|u\|_{0,\infty,\Omega} \tag{2.3.23}$$

由(2.3.21)得

$$|l(v)|\leqslant\|u\|_{0,\infty,\Omega}\|v\|_{0,1,\Omega}$$

因此

$$\|l\|_{(L^1(\Omega))'}\leqslant\|u\|_{0,\infty,\Omega} \tag{2.3.24}$$

由(2.3.23)和(2.3.24)可得(2.3.22). 证毕.

**定义 2.3.1** 设 X，Y 是两个线性赋范空间，称 X，Y 是同构的，如果存在一个线性算子 A，它把 X 映射到 Y 上，并且 A 的逆算子 $A^{-1}$，它把 Y 映到 X 上.如果由 A 建立起来的 X 和 Y 之间一一对应关系还保持范数相等，即 $\| x \|_X=\| Ax \|_Y$，则称 X，Y 是等距同构的，记为 $X\simeq Y$.

**定理 2.3.1** ($L^p(\Omega)$的 Riesz 表示定理) 设 $1<p<\infty$，又设

$l\in(\mathbf{L}^p(\Omega))'$，那么存在唯一的 $v\in\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$，使得对于一切 $u\in\mathbf{L}^p(\Omega)$，有

$$l(u)=\int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

而且 $\|v\|_{o,p',\Omega}=\|l\|_{(L^p(\Omega))'}$，即 $(\mathbf{L}^p(\Omega))'\simeq L^{p'}(\Omega)$.

**证** 如果 $l=0$，可取 $v=0$.如果 $l\neq0$，取适当常数 $c$，使 $cl$ 范数为1，因此证明时可假定

$$\|l\|_{(L^p(\Omega))'}=1.$$

由引理2.3.1，存在 $u_0\in\mathbf{L}^p(\Omega)$，且 $\|u_0\|_{o,p,\Omega}=1$ 和 $l(u_0)=1$. 作函数

$$v_0(x)=\begin{cases}|u_0(x)|^{p-2}\ \overline{u_0(x)} & \text{当}u_0(x)\neq0\\ 0 & x\text{在其它处}\end{cases}$$

显然 $v_0\in\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$以及 $\|v_0\|_{o,p',\Omega}=1$.由函数 $v_0$ 作一个在 $\mathbf{L}^p(\Omega)$上的线性泛函

$$l_{v_0}(u)=\int_\Omega v_0u\,dx$$

显然，$l_{v0}(u_0)=1$，从而

$$\|l_{v_0}\|_{(L^p(\Omega))'}=\|v_0\|_{o,p',\Omega}=1$$

即线性泛函 $l_{v0}$ 和 $l$ 都满足引理2.3.2中的性质，由唯一性得 $l_{v0}=l$. 证毕.

**定理2.3.2** ($\mathbf{L}^1(\Omega)$的Riesz表示定理) 设 $l\in(\mathbf{L}^1(\Omega))'$，那么存在唯一的 $v\in\mathbf{L}^\infty(\Omega)$使得对一切 $u\in\mathbf{L}^1(\Omega)$有

$$l(u)=\int_\Omega u(x)v(x)dx$$

而且 $\|v\|_{o,\infty,\Omega}=\|l\|_{(L^1(\Omega))'}$，即 $(\mathbf{L}^1(\Omega))'\simeq\mathbf{L}^\infty(\Omega)$.

**证** 假设 $l\neq0$ 和 $\|l\|_{(L^1(\Omega))'}=1$，根据 $\Omega$ 的测度 $\mu(\Omega)$ 分两种情况证明

(1) 如果 $\mu(\Omega)<\infty$，则由定理 1.8.3，当 $1<p<\infty$时，有 $\mathbf{L}^p(\Omega)\subset\mathbf{L}^1(\Omega)$，而且对于任何 $u\in\mathbf{L}^p(\Omega)$

$$|l(u)|\leqslant\|u\|_{0,1,\Omega}\leqslant\mu(\Omega)^{1-(1/p)}\|u\|_{0,p,\Omega}$$

因此 $l\in(\mathbf{L}^p(\Omega))'$，根据定理 2.3.1，存在 $v_p\in\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$使得

$$\|v_p\|_{0,p',\Omega}\leqslant(\mu(\Omega))^{1-(1/p)}\tag{2.3.25}$$

而且有

$$l(u)=\int_\Omega u(x)v_p(x)dx,\quad\forall u\in\mathbf{L}^p(\Omega)\tag{2.3.26}$$

由推论 1.8.1 知，$\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$在 $\mathbf{L}^p(\Omega)$，$\forall 1<p<\infty$中稠密，$\forall$ $1<p,\ q<\infty$，$\forall\varphi\in\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$，有

$$\int_\Omega\varphi(x)v_p(x)dx=l(\varphi)=\int_\Omega\varphi(x)v_q(x)dx$$

由此得到在 $\Omega$ 上 $v_p=v_q(a.e.)$，因此对于每个 $p$，在(2.3.26)中可以用一个属于 $\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$的函数 $v$ 去代替 $v_p$，而且按照(2.3.25)，$v$ 满足

$$\|v\|_{0,p',\Omega}\leqslant(\mu(\Omega))^{1-(1/p)}$$

又由定理 1.8.3，可知 $v\in\mathbf{L}^\infty(\Omega)$，且

$$\|v\|_{0,\infty,\Omega}\leqslant\lim_{p'\to\infty}(\mu(\Omega))^{1-(1/p)}=1\tag{2.3.27}$$

另一方面，由 $l\in(\mathbf{L}^1(\Omega))'$的表达式容易推出

$$1=\|l\|_{(\mathbf{L}^1(\Omega))'}\leqslant\|v\|_{0,\infty,\Omega}\tag{2.3.28}$$

(2) 如果 $\Omega$ 没有有限的 $\mu(\Omega)$，这时仍然有 $\Omega=\bigcup\limits_{j=1}^\infty O_j$，其中 $O_j=\{x\in\Omega:\ j-1\leqslant|x|<j\}$ 有有限体积，集合 $O_j$ 互不相交，设 $\chi_j(x)$ 是 $O_j$ 的特征函数．如果 $u_j\in\mathbf{L}^1(O_j)$，令$\tilde{u}_j$ 表示 $u_j$ 在 $O_j$ 外为零的零延拓，即当 $x\in O_j$ 时，$\tilde{u}_j(x)=u_j(x)$，否则$\tilde{u}_j(x)=0$. 设 $l_j(u_j)=l(\tilde{u}_j)$，则 $l_j\in(\mathbf{L}^1(O_j))'$ 且 $\|l_j\|_{(\mathbf{L}^1(O_j))'}$

$\leqslant 1$，根据在(1)中$\mu(\Omega)$是有限的情况，存在$v_j\in\mathbf{L}^\infty(O_j)$使得$\|v_j\|_{0,\infty,O_j}\leqslant 1$而

$$l_j(u_j)=\int_{O_j}u_j(x)v_j(x)dx=\int_\Omega\tilde{u}_j(x)v(x)dx$$

其中，对于$x\in O_j(j=1,\ 2,\ \cdots)$，$v(x)=v_j(x)$，因此$\|v\|_{0,\infty,\Omega}\leqslant 1$. 如果$u\in\mathbf{L}^1(\Omega)$，令$u=\sum_{j=1}^\infty\chi_j u_j$由Lebesgue控制收敛定理，这个级数在$\mathbf{L}^1(\Omega)$中依范数收敛. 由于

$$l\left(\sum_{j=1}^k\chi_j u\right)=\sum_{j=1}^k\quad l_j(\chi_j u)=\sum_{j=1}^k\int_\Omega\chi_j(x)u(x)v(x)dx$$

根据控制收敛定理取极限，得

$$l(u)=\int_\Omega u(x)v(x)dx$$

即$\mu(\Omega)$有限的情况一样，有$\|v\|_{0,\infty,\Omega}=1$. 证毕.

**定义 2.3.2** 如果赋范空间X与其二次对偶空间$X''=(X')'$是线性同构，且是满的，则称赋范空间X是自反的.

**定理 2.3.3** $\mathbf{L}^p(\Omega)$是自反的当且仅当$1<p<\infty$.

**证** 设$X=\mathbf{L}^p(\Omega)$，$1<p<\infty$，由于$X'\simeq\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$，那么，$\forall\omega\in X''$，存在$\tilde{\omega}\in(\mathbf{L}^{p'}(\Omega))'$，使得$\omega(v)=\tilde{\omega}(\tilde{v})$，其中

$$v(u)=\int_\Omega\tilde{v}(x)u(x)dx\qquad\forall u\in X,$$

类似地，对应于$\tilde{\omega}\in(\mathbf{L}^{p'}(\Omega))'$，存在$u\in X$使得

$$\tilde{\omega}(\tilde{v})=\int_\Omega\tilde{v}(x)u(x)dx\qquad\forall\tilde{v}\in\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$$

由此得到对于一切$v\in\mathbf{X}'$，有

$$\omega(v)=\tilde{\omega}(\tilde{v})=\int_{\Omega}\tilde{v}(x)u(x)dx=v(u)=J_Xu(v),$$

$J_X$是X到X″中的自然等距同构，即$J_X$把X映射到X″上，因此$\mathbf{X}=\mathbf{L}^p(\Omega)$是自反的．证毕．

因为$\mathbf{L}^1(\Omega)$是可分的，又$\mathbf{L}^1(\Omega)\simeq\mathbf{L}^\infty(\Omega)$，而$\mathbf{L}^\infty(\Omega)$是不可分的，所以$\mathbf{L}^1(\Omega)$和$\mathbf{L}^\infty(\Omega)$都不可能是自反的．

# 第三章　整数阶 СОБОЛЕВ 空间

本章着重讨论整数阶 Соболев 空间 $H^{m,p}(\Omega)$的定义及其性质，特别是 Соболев 嵌入定理.这里 $\Omega$ 是 $R^n$ 中的开集，$1\leqslant p\leqslant\infty$.除了部分段落外，本章主要是讨论 n 个实变量的弱可微函数，但其结论对于复变量弱可微函数也成立.

## § 3.1　СОБОЛЕВ 空间 $H^{m,p}(\Omega)$的定义

1°. 弱导数

由前面的讨论中已经知道，$L^1_{loc}(\Omega)$ 中每一个函数 $u$ 对应着一个广义函数 $T_u$，每一个广义函数有任意阶的广义导数 . 然而不是每一个局部可积函数的广义导数都是局部可积函数 . 为此先讨论

**引理 3.1.1**　设 $u(x)$是在区间(0,1)上的连续函数.如果

$$\int_0^1 u(x)\varphi(x)dx=0 \qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(0,1) \tag{3.1.1}$$

则　$u(x)\equiv 0$.

**证**　如果 $u(x)\not\equiv 0$，必存在一个点 $x_0$，不失一般性，设 $u(x_0)>0$，因此存在 $\delta>0$ 使得 $u(x)>0$，　$\forall\ x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset(0,1)$. 在 $C_0^\infty(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 中取一函数 $\varphi_0(x)$，使得

$\varphi_0(x)>0\quad\forall\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

则

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} u(x)\varphi_0(x)dx>0 \tag{3.1.2}$$

又　$\varphi_0(x)\in C_0^\infty(0,1)$，故由假设有

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} u(x)\varphi_0(x)dx = \int_0^1 u(x)\varphi_0(x)dx = 0 \tag{3.1.3}$$

则(3.1.2)与(3.1.3)矛盾． 证毕．

**例** 设 $u(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且在区间 $[x_0,x_1]\subset(0,1)$ 上不是绝对连续函数．显然，$u(x)\in \mathbf{L}^1_{loc}(0,1)$. $u(x)$ 的一阶广义导数 $g(x)$ 不属于 $\mathbf{L}^1_{loc}(0,1)$.

用反证法.如果$g(x)\in\mathbf{L}^1_{loc}(0,1)$，则

$$F(x)=\int_\alpha^x g(t)dt$$

是(0,1)上的连续函数，这里 $0<\alpha<1$ 是一常数.

因为$g=\partial u$，故 $\forall\varphi\in C_0^\infty(0,1)$

$$\int_0^1 u(x)\varphi'(x)dx=(-1)\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx$$

$$=(-1)\int_0^1 \varphi(x)d\left(\int_\alpha^x g(t)dt\right)=\int_0^1 F(x)\varphi'(x)dx$$

因此有

$$\int_0^1\Big(u(x)-F(x)\Big)\varphi'(x)dx=0 \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(0,1) \tag{3.1.4}$$

取函数 $\varphi_0(x),\varphi(x)\in C_0^\infty(0,1)$. 使得

$$\int_0^1\varphi_0(x)dx=1,\text{记}\ \ \lambda=\int_0^1\varphi(x)dx,$$

$$\chi(x)=\varphi(x)-\lambda\varphi_0(x)\in C_0^\infty(0,1)$$

则

$$\int_0^1\chi(x)dx=\int_0^1\varphi(x)dx-\lambda\int_0^1\varphi_0(x)dx=0$$

记 $\psi(x)=\int_0^x\chi(x)dx$, 则 $\psi(x)\in C_0^\infty(0,1)$. 由 (3.1.4) 可有

$$\int_0^1 (u(x)-F(x))\chi(x)dx = \int_0^1 (u(x)-F(x))\psi'(x)dx = 0 \tag{3.1.5}$$

记 $G(x)=u(x)-F(x)$，它是定义在区间(0，1)上的连续函数，把 $\chi(x)$ 代入(3.1.5)有

$$\int_0^1 G(x)\varphi(x)dx - C\lambda = 0,\ \text{这里} C = \int_0^1 G(x)\varphi_0(x)dx$$

即 $\displaystyle\int_0^1 (G(x)-C)\varphi(x)dx = 0 \quad , \quad \forall\varphi(x)\in C_0^\infty(0,1)$

由引理 3.1.1 得 $G(x)-C=0$，即 $u(x)=F(x)+C$，又因为 $F(x) = \int_a^x g(t)dt$ 在区间 $[x_0,x_1]$ 上是绝对连续函数，从而 $u(x)$ 在区间 $[x_0,x_1]$ 上必须是绝对连续函数，这与对 $u$ 的假设矛盾，因此 $u$ 的广义导数 $g$ 不属于 $L^1_{loc}(0,1)$.

这个例子还说明了一个事实，如果函数 $u$：$R\to R$ 是绝对连续的，则对几乎所有的 $x\in R$，由 $\partial u$ 定义的函数 $g$ 满足 $g\in L^1_{loc}(R)$ 以及在 $D'(R)$ 中 $g=\partial u$. 反之如果 $T\in D'(R)$ 且 $\partial T\in L^1_{loc}(R)$，则 $T_u = u$，$u$ 是绝对连续函数，且 $\partial T=\partial u$.

**定义 3.1.1** 设 $u\in L^1_{loc}(\Omega)$，则 $T_u$ 和 $\partial^\alpha T_u$，$(\alpha\in Z^n_+)$，都是广义函数，如果存在某一函数 $v_\alpha\in L^1_{loc}(\Omega)$，使得 $T_{v_\alpha}=\partial^\alpha T_u$，在相差一个零测集的意义下，$v_\alpha$ 是唯一确定的，则称 $v_\alpha$ 是 $u$ 的 $\alpha$ 阶弱导数．即 $v_\alpha\in L^1_{loc}(\Omega)$ 且满足

$$\int_\Omega u(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v_\alpha(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

**引理 3.1.2** 设 $u\in L^1_{loc}(\Omega)$，$v_\alpha$ 是 $u$ 的 $\alpha$ 阶弱导数．如果把 $u$ 限制在 $\Omega_1(\subset\Omega)$ 上，则 $u$ 在 $\Omega_1$ 上的 $\alpha$ 阶弱导数就是 $v_\alpha$ 在 $\Omega_1$ 上的限制所得到的函数，即

$$\partial^\alpha u|_{\Omega_1} = v_\alpha|_{\Omega_1}$$

**证** 由弱导数的定义有

$$\int_{\Omega} u\partial^{\alpha}\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} v_{\alpha}\varphi dx \qquad \forall\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$$

因为$\Omega_1\subset\Omega$，故 $C_0^{\infty}(\Omega_1)\subset C_0^{\infty}(\Omega)$. 从而

$$\int_{\Omega} u\partial^{\alpha}\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} v_{\alpha}\varphi dx \qquad \forall\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega_1)$$

又 supp $\varphi\subset\Omega_1$，因此

$$\int_{\Omega 1} u\partial^{\alpha}\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega 1} v_{\alpha}\varphi dx \quad \forall\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega_1)$$

即$v_{\alpha}\in L^1_{loc}(\Omega_1)$，故 $v_{\alpha}|_{\Omega_1}=\partial^{\alpha}u \ |_{\Omega_1}$. 证毕.

在 § 1.7 中，我们曾给出广义函数 $T\in D'(\Omega)$ 与连续函数 $g\in C^{\infty}(\Omega)$ 乘积 $gT$ 的定义

$$<gT,\varphi>=<T,g\varphi> \qquad \forall\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$$

容易验证，如下的 Leibniz 公式成立

$$\partial^{\alpha}(gT)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\beta}g\ \partial^{\alpha-\beta}T, \qquad \forall\alpha,\beta\in Z_+^n$$

2°. 乘积空间

设 $X_j(j=1,2,\cdots,n)$是范数为$\|\cdot\|_j$的 Banach 空间.由点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$x_j\in X_j$组成的笛卡尔乘积空间

$$X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\prod_{j=1}^{n} X_j$$

在 $x+y=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$，$cx=(cx_1,\cdots,cx_n)$ 运算下是一个向量空间，而且关于以下范数

$$\|x\|_{(p)}=\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|_j^p\right)^{1/p} \qquad 1\leqslant p<\infty$$

$$\|x\|_{(\infty)}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|x_j\|_{\infty} \qquad p=\infty$$

中的任何一个而言 X 是一个 Banach 空间.还有

**定理 3.1.3** 如果 $1 \leqslant j \leqslant n$,

(1) $X_j$ 是可分的，则 X 是可分的;

(2) $X_j$ 是自反的，则 X 是自反的;

(3) $X_j$ 是一致凸的，则 X 是一致凸的.如果 $1 < p < +\infty$，则 $\|\cdot\|_{(p)}$ 是X上一致凸的范数.

特别地，取 $X_j = L^p(\Omega).\forall\alpha \in Z_+^n$，$N(m, n)$ 或 $N$ 表示满足条件 $0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$ 的 $n$ 重指数 $\alpha$ 的个数，即 $N(m,n) = N = \sum\limits_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} 1$. 令 $L_N^p = \prod\limits_{j=1}^{N} L^p(\Omega)$. 在 $L_N^p$ 中 $u = (u_1, \cdots, u_N)$ 的范数定义为

$$\|u\|_{L_N^p} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{j=1}^{N} \|u_j\|_{0,p,\Omega}^p\right)^{1/p} & \text{如果} 1 \leqslant p < \infty \\ \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} \|u_j\|_{0,\infty,\Omega} & \text{如果} \quad p = \infty \end{cases}$$

则由 $L^p(\Omega)$ 空间的性质及定理 3.1.3 有

**定理 3.1.4**

(1) 如果 $1 \leqslant p < \infty$，则 $L_N^p$ 是可分的;

(2) 如果 $1 < p < \infty$，则 $L_N^p$ 是自反的;

(3) 如果 $1 < p < \infty$，则 $L_N^p$ 是一致凸的.

3°. Соболев 空间

定义泛函 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 如下:

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \begin{cases} \left\{\sum\limits_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_{0,p,\Omega}^p\right\}^{1/p} & \text{如果} 1 \leqslant p < \infty \\ \max\limits_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_{0,\infty,\Omega} & \text{如果} \quad p = \infty, \end{cases}$$

其中 $m$ 是非负整数.对于任何使上式右端有意义的函数 $u$，$\|u\|_{m,p,\Omega}$ 符合范数定义.如此一切使 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 有意义的函数的全体组成一个空间，且把这个空间中在 $\Omega$ 上几乎处处相等的函数看作为一个等价

函数类，那么可以研究如下三个函数空间：

$H^{m,p}(\Omega)$ 是 $\{u\in C^m(\Omega):\|u\|_{m,p,\Omega}<\infty\}$ 关于范数 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 的完备化所得到的空间；

$W^{m,p}(\Omega)=\{u\in L^p(\Omega):\partial^\alpha u\in L^p(\Omega),\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant m$，其中 $\partial^\alpha u$ 是 $u$ 的 $\alpha$ 阶弱导数$\}$；

$W_0^{m,p}(\Omega)$是空间$C_0^\infty(\Omega)$在范数$\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$下的闭包.

装配前面定义的范数 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 后，则称这些空间为 $\Omega$ 上的 Соболев 空间．显然，$W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$，而且 $1\leqslant p<\infty$ 时，$C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密．

对于任何正整数 $m$，下述嵌入是显然的：$W_0^{m,p}(\Omega)$ 嵌入 $H^{m,p}(\Omega)$,$W^{m,p}(\Omega)$嵌入$L^p(\Omega)$.

1964 年 Meyers 和 Serrin 证明了对任何区域 $\Omega$，有 $H^{m,p}(\Omega)=W^{m,p}(\Omega)$. 这一结果，使 Соболев 空间的理论完整无隙．以后 Соболев 空间都记为 $H^{m,p}(\Omega)$. 特别是记 $H^{m,p}(\Omega)=W^{m,p}(\Omega)$, $H_0^{m,p}(\Omega)=W_0^{m,p}(\Omega)$，$H^{m,2}(\Omega)=H^m(\Omega)$以及$\|\cdot\|_{m,2,\Omega}=\|\cdot\|_{m,\Omega}$.

$H^{m,p}(\Omega)$ 是苏联数学家 Соболев 1930 年提出的，因此这些空间命名为 Соболев 空间．

## § 3.2 $H^{m,p}(\Omega)$空间的基本性质

**定理 3.2.1** $W^{m,p}(\Omega)$ 是 Banach 空间．

**证** 设$\{u_n\}$ 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列，则$\forall\alpha\in Z_+^n\ (0\leqslant|\alpha|\leqslant m)$，$\{\partial^\alpha u_n\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 序列，因为 $L^p(\Omega)$ 是 Banach 空间，在 $L^p(\Omega)$ 中存在函数 $u$ 和 $u_\alpha$ $(0\leqslant|\alpha|\leqslant m)$，使得当 $n\to\infty$ 时，在 $L^p(\Omega)$ 中，$u_n\to u$ 和 $\partial^\alpha u_n\to u_\alpha$. 由于 $L^p(\Omega)\subset L^1_{loc}(\Omega)$，所以 $u_n$，$u$ 以及 $\partial^\alpha u_n$，$u_\alpha$ 分别对应广义函数 $T_{u_n}$，$T_u$ 以及 $T_{\partial^\alpha u_n}$，$T_{u_\alpha}$. 现在证明 $T_{\partial^\alpha u_n}$ 在 $D'(\Omega)$ 的拓扑意义下收敛于 $T_{u_\alpha}$.

只证明 $\alpha=0$ 的情况.设 $1<p<\infty$，由 Hoelder 不等式得

$$|T_{u_n}(\varphi)-T_u(\varphi)|=\left|\int_\Omega u_n\varphi dx-\int_\Omega u\varphi dx\right|$$

$$\leqslant\left[\int_\Omega |u_n-u|^p dx\right]^{1/p}\left[\int_\Omega |\varphi|^{p'} dx\right]^{1/p'}\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

其中$1/p+1/p'=1$.

当$p=1$时，直接积分可得

$$|T_{u_n}(\varphi)-T_u(\varphi)|\leqslant\sup_{x\in\Omega}|\varphi(x)|\int_\Omega |u_n-u|dx\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

因为$\left[\int_\Omega |\varphi|^{p'} dx\right]^{1/p'}$或$\sup\limits_{x\in\Omega}|\varphi(x)|$有界，$\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{0,p,\Omega}=0$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}T_{u_n}(\varphi)=T_u(\varphi),\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

同理有

$$\lim_{n\to\infty}T_{\partial^\alpha u_n}(\varphi)=T_{u_\alpha}(\varphi),\quad\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

因此有

$$T_{u_\alpha}(\varphi)=\lim_{n\to\infty}T_{\partial^\alpha u_n}(\varphi)=\lim_{n\to\infty}(-1)^{|\alpha|}T_{u_n}(\partial^\alpha\varphi)$$
$$=(-1)^{|\alpha|}T_u(\partial^\alpha\varphi)$$

说明对于$0\leqslant|\alpha|\leqslant m$，在$D'(\Omega)$拓扑意义下$u_\alpha=\partial^\alpha u$，而且是弱导数. 因此$u\in W^{m,p}(\Omega)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{m,p,\Omega}=0$，所以$W^{m,p}(\Omega)$是完备的. 证毕.

把$W^{m,p}(\Omega)$看作$L^p(\Omega)$的笛卡尔乘积空间的一个闭子空间，可以立刻得到空间$W^{m,p}(\Omega)$的一些重要性质. 设$P$是一个算子: $W^{m,p}(\Omega)\to L_N^p(\Omega)$，其定义如下

$$Pu=\prod_{|\alpha|\leq m}(\partial^{\alpha 1}u,\ \partial^{\alpha 2}u,\ \cdots,\ \partial^{\alpha N}u)\qquad \forall u\in W^{m,p}(\Omega)$$

因为 $\|Pu\|_{L_N^p}=\|u\|_{m,p,\Omega}$，所以 $P$ 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 到子空间 $W(m,p)=\{Pu\},u\in W^{m,p}(\Omega)$，的一个等距同构．因为 $W^{m,p}(\Omega)$ 是完备的，所以 W 是 $L_N^p$ 的闭子空间．由 Banach 空间的性质易知，当 $1\leq p<\infty$ 时，$W$ 是可分的；当 $1<p<\infty$ 时，W 是自反的而且是一致凸的，所以对于 $W^{m,p}(\Omega)=P^{-1}(W)$ 结论同样成立．故有

**定理 3.2.2** $W^{m,p}(\Omega)$ 当 $1\leq p<\infty$ 时是可分的，当 $1<p<\infty$ 时，是自反的而且一致凸的．特别 $W^{m,2}(\Omega)$ 是一个可分的 Hilbert 空间，其内积为

$$(u,v)_m=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}(\partial^{\alpha}u,\partial^{\alpha}v)$$

其中 $(u,v)=\int_{\Omega}u(x)\overline{v(x)}dx$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的内积，且有 $W^{0,2}(\Omega)=L^2(\Omega)$.

根据 Banach 空间 $X$ 是自反的充要条件是 $X$ 的闭单位球 $\overline{B_1(0)}=\{x\in X:\ \|x\|_X\leq 1\}$ 是弱序列紧的，易知

**推论 3.2.1** $W^{m,p}(\Omega)$ 中任一有界序列 $\{u_n\}$，必有一个弱收敛的子序列 $\{u_{n'}\}$，且其极限函数也有相同的界．

当古典偏导数存在且连续时，广义函数意义下的偏导数和古典偏导数是一样的．因此 $S^*=\{\varphi\in C^m(\Omega):\ \|\varphi\|_{m,p,\Omega}<\infty\}\subset W^{m,p}(\Omega)$. 因为 $W^{m,p}(\Omega)$ 是完备的，$S^*$ 中的恒等算子延拓成 $S^*$ 的完备化 $H^{m,p}(\Omega)$ 和 $S^*$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的闭包之间存在一个等距同构．故有

**推论3.2.2** $H^{m,p}(\Omega)\subset W^{m,p}(\Omega)$

**定理 3.2.3** 若 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，则 $\forall x\in\Omega$ 且 $\mathrm{dist}(x,\ \partial\Omega)>\rho>0$，平均函数 $J_\rho u$ 的 $\alpha$ 阶古典导数等于 $u$ 的 $\alpha$ 阶弱导数 $\partial^\alpha u$ 的平均函数，即

$$\partial^\alpha J_\rho u(x)=J_\rho\partial^\alpha u(x)\qquad 0\leq|\alpha|\leq m$$

证　$\forall \alpha \in Z_+^n$，根据§1.8中软化子和平均函数的性质，有

$$\begin{aligned}\partial_x^\alpha J_\rho u(x) &= \int_\Omega u(y)\ \partial_x^\alpha \omega_\rho(x-y)dy \\ &= \int_\Omega u(y)(-1)^{|\alpha|}\partial_y^\alpha \omega_\rho(x-y)d \\ &= \int_\Omega \partial_y^\alpha u(y)\ \omega_\rho(x-y)dy \\ &= J_\rho \partial^\alpha u(x).\end{aligned}$$

证毕.

**定理 3.2.4**　设 $1 \leqslant p < \infty$，$u \in W^{m,p}(\Omega)$，如果 $K \subset\subset \Omega$，则 $u$ 的平均函数 $J_\rho u$ 在 $W^{m,p}(K)$ 中收敛于 $u$，即 $\forall \rho < \text{dist}(K, \partial\Omega)$，有 $\|u - J_\rho u\|_{m,p,K} \to 0 (\rho \to 0^+)$.

证　由引理 3.1.2 知 $\forall u \in W^{m,p}(\Omega)$，有 $u \in W^{m,p}(K)$，因此 $\partial^\alpha u \in L^p(K)$，由定理1.8.4有

$$\lim_{\rho \to 0^+} \|J_\rho \partial^\alpha u - \partial^\alpha u\|_{0,p,K} = 0 \qquad \forall 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$$

又由 $W^{m,p}(\Omega)$ 的范数定义以及定理 3.2.3，有

$$\lim_{\rho \to 0^+} \|J_\rho u - u\|_{m,p,K} = 0$$

证毕.

**定理 3.2.5**　设 $1 \leqslant p < \infty$，$\Omega$ 是 $R^n$ 中开集，则 $C^\infty(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$中稠密.

证　作开集

$$\Omega_n = \left\{ x \in \Omega : |x| < n, 且 \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n} \quad n = 1,2,\cdots \right\}$$

令$\Omega_0$，$\Omega_{-1}$是空集.开集族

$$Q = \{O_n : O_n = \Omega_{n+1} \cap (\overline{\Omega}_{n-1})^C \quad n = 1,2,\cdots\}$$

是 $\Omega$ 的一个开覆盖．由单位分解定理知道，存在 $C_0^\infty(R^n)$ 中的函数序

列 $\{\psi_n\}$，满足定理 1.8.6 的结论 (1)～(4)。把 $\{\psi_n\}$ 中满足 supp $\psi_n \subset O_1$ 的 $\psi_n$ 的全体相加构成 $g_1$，在留下来的函数序列中满足 supp $\psi_n \subset O_2$ 的 $\psi_n$ 全体相加构成 $g_2$，这样继续做下去，得到序列 $\{g_n\}$，显然 $\{\psi_n\}$ 中每一个元素总是某一个 $g_n$ 的一部分，而且只出现一次，因而在 $\Omega$ 上 $g_n \in C_0^\infty(O_n)$ 而且 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = 1$. 设 $u \in W^{m,p}(\Omega)$，有 $u = \sum_{n=1}^{\infty} g_n u = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$，这里 $h_n = g_n u$，且 supp $h_n \subset O_n$ 和 $h_n \in W^{m,p}(\Omega)$.

再作开集族

$\tilde{Q} = \{\tilde{O}_i : \tilde{O}_i = \Omega_{i+2} \bigcap (\overline{\Omega}_{i-2})^c,\ i = 1, 2, \cdots\}$.

于是 $O_i \subset \tilde{O}_i \subset\subset \Omega$, 且 $O_i$ 到 $\tilde{O}_i$ 的边界的距离为 $((i+2)(i+1))^{-1}$，利用定理 1.8.1，当 $0 < \delta < ((i+2)(i+1))^{-1}$ 时，有 $J_\delta h_i \in C_0^\infty(\tilde{O}_i)$. 由定理 3.2.4 知，对任意 $\varepsilon > 0$，只要 $\delta_i$ 取得足够小．且满足 $0 < \delta_i < ((i+2)(i+1))^{-1}$ 就有

$\|J_{\delta_i} h_i - h_i\|_{m,p,\Omega} = \|J_{\delta_i} h_i - h_i\|_{m,p,\tilde{O}_i} < \varepsilon / 2^i$

设 $g = \sum_{i=1}^{\infty} J_{\delta_i} h_i$，对任意 $K \subset\subset \Omega$，在和式中只可能有限项不为 0，因此 $g \in C^\infty(\Omega)$，对于 $x \in \Omega_n$，有

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n+2} g_j(x) u(x),\quad g(x) = \sum_{j=1}^{n+2} J_{\delta_j} h_j$$

因此

$$\|u - g\|_{m,p,\Omega_n} \leqslant \sum_{j=1}^{n+2} \|J_{\delta_j} h_j - h_j\|_{m,p,\Omega} < \varepsilon$$

由 Lebesgue 积分控制收敛定理有 $\|u - g\|_{m,p,\Omega} < \varepsilon$. 证毕．

此定理不能推广到 $p = \infty$ 的情况.

定理 3.2.5 表明 $W^{m,p}(\Omega) \subset H^{m,p}(\Omega)$，再根据推论 3.2.2，则有

**定理 3.2.6** [Meyers-Serrin]如果 $1 \leqslant p < \infty$，则

$$H^{m,p}(\Omega)=W^{m,p}(\Omega)$$

**推论3.2.3** $W_0^{m,p}(\Omega)\subset W^{m,p}(\Omega)$ .

$W^{m,p}(\Omega)$ 空间及其以后要讨论的嵌入定理对区域 $\Omega$ 有一定的限制．为此这里讨论区域 $\Omega$ 的几何性质，特别是锥形区域和 $L$ 型区域．

设 $B_1$ 是 $R^n$ 中以原点为中心的开球，$B_2$ 是不经过原点的开球．集合 $C=\{\alpha x: x\in B_2, 0<\alpha<\infty\}$ 和 $C_0=B_1\cap C$ 分别称为顶点在原点 $O$ 的无限锥和有限锥，$B_1$ 的半径称为有限锥 $C_0$ 的高，称集合 $C_x=\{x+y: y\in C_0\}$ 是顶点在 $x$ 的有限锥．$C_x$ 是 $C_0$ 经过平移运动得到的，平移量是 $x$.

设 $y_1$，$y_2$，…，$y_n$ 是 $R^n$ 中 $n$ 个点，可把它们看作 $n$ 个向量．如果这 $n$ 个向量线性无关，就称集合

$$P_0=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i:\quad 0<\alpha_i<1,\ i=1,2,\cdots,n\right\}$$

为平行多面体，其中有一个顶点在坐标原点．$P_x=\{x+y: y\in P_0\}$ 是 $P_0$ 经过平移运动得到的，平移量是 $x$.

**定义 3.2.1** 称区域 $\Omega$ 是有界锥形区域，如果满足:

(1) $\Omega$ 是 $R^n$ 中的有界开集;

(2) $\Omega$ 中的任一点 x 都是有限锥 $C_x(\subset\Omega)$的顶点，并且每一个有限锥 $C_x$ 全同于过原点的某一有限锥 $C_0$(注意 $C_x$ 不需要由 $C_0$ 经平移运动得到).

称 $\Omega$ 是锥形区域，如果它只满足定义 3.2.1 中的(2).

因此可以说有界锥形区域是 $C_0$ 在有限范围内经刚体运动(由平移和旋转两部分组成)留下的迹.且这种运动不要求具有连续性.

**定义 3.2.2** 称区域 $\Omega$ 是 L 型区域，如果满足:

(1) $\Omega$ 是 $R^n$ 中的有界开集，$\Omega$ 在边界 $\partial\Omega$ 的一侧;

(2) 存在有限个开集 $O_1,O_2,\cdots,O_m$,$\Omega$ 的边界 $\partial\Omega\subset\bigcup_{i=1}^{m}O_i$，且 $\partial\Omega_i=\partial\Omega\cap O_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 在某一局部笛卡尔坐标

$(\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{in})$中可用满足 Lipschitz 条件的函数

$$\xi_{in} = f_i(\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{in-1}) \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

来表示.

从几何上讲，上述定义意味着 $\Omega$ 的边界上的每一点 $x$ 有一个邻域 $U_x$，使得 $\partial\Omega \cap U_x$ 是一个 Lipschitz 连续函数的图象.

L 型区域是有界锥形区域，而有界锥形区域不一定是 L 型区域. 但有界锥形区域是由有限个 L 型区域的并集组成的.

**定理 3.2.7** (Gagliardo 定理)设 $\Omega$ 是 $R^n$ 中的有界锥形区域,对每一个数 $d>0$，存在开集 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_m$，具有性质:

(1) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i$

(2) 对每一个 $\Omega_i$，存在一个顶点在原点的平行多面体 $P_{0i}$，使得 $\Omega_i = \bigcup_{x \in A_i}(x + P_{0i})$，其中闭集 $A_i \subset \overline{\Omega}_i$，且其直径不超过 $d$. 只要 $d$ 取得足够小 $\Omega_i$ 可以是 L 型区型 .

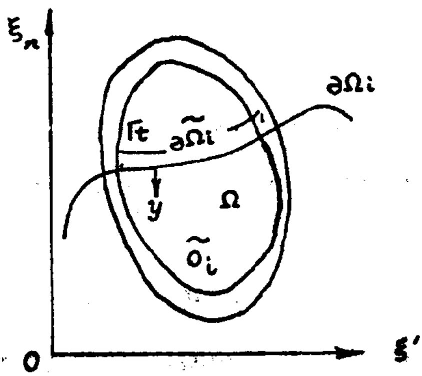
证明见 Adams[2].

**定理 3.2.8** 设 $\Omega$ 是 $L$ 型区域 ,$1 \leqslant p < \infty$, 那么 $C_0^\infty(R^n, \Omega)$ 在 $H^{m,p}(\Omega)$ 中稠密 . 这里 $C_0^\infty(R^n, \Omega)$ 表示 $C_0^\infty(R^n)$ 中的函数在 $\Omega$ 上的限制构成的集合 . 有时记 $C_0^\infty(R^n, \Omega)$ 为 $C_0^\infty(\overline{\Omega})$.

**证** 设 $\Omega$ 是 L 型区域，则存在 $k$ 个开集 $O_1, O_2, \cdots O_k$, 满足 $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{k} O_i$，再取一组开集$\tilde{O}_i$，使得$\overline{\tilde{O}}_i \subset O_i$，并且有 $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{k} \tilde{O}_i$. 另外，还存在开集 $O_0 (= \tilde{O}_0)$ 使得$\tilde{O}_0 \subset \Omega$ 和 $\Omega \bigcup \partial\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{k} \tilde{O}_i$. $\partial\Omega_i = O_i \cap \partial\Omega$，$\partial\tilde{\Omega}_i = \tilde{O}_i \cap \partial\Omega$. $\partial\Omega_i$ 在局部坐标系中可用满足 Lipschitz 条件的函数来表示 . $\partial\Omega_i$，$\partial\tilde{\Omega}_i$，$O_i$，$\tilde{O}_i$ 和局部坐标 $(\xi', \xi_n)$ 之间的关系见图，这里 $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1})$. 取一向量 $y$ 与 $\xi_n$ 平行，站在

$\partial\tilde{\Omega}_i$ 上看 $y$ 的正向指向 $\Omega$ 的内部，当 $y$ 的长度足够小时，对任意 $0<\lambda<1$，就有 $x+\lambda y\in\Omega$，这里 $x$ 是 $\partial\tilde{\Omega}_i$ 上的任意一点．

记 $\Gamma_t=\partial\tilde{\Omega}_i-ty$，$t>o$.




当 $t$ 充分小时，有 $\Gamma_t\subset O_i$ 和 $\Gamma_t\bigcap\bar{\Omega}$ 是空集．

由定理 1.8.6，对 $\tilde{O}_o$，$\tilde{O}_1$，…，$\tilde{O}_k$，存在 $k+1$ 个函数 $g_i(i=0,1,\cdots,k)$ 满足：(1) $g_i\subset C_o^\infty(\tilde{O}_i)$；(2) $0\leqslant g_i\leqslant 1$；(3) 在 $\Omega\bigcup\partial\Omega$ 的一个邻域上 $\sum\limits_{i=0}^{k}g_i=1$.

设 $u\in H^{m,p}(\Omega)$，$u_i=g_iu(i=0,1,\cdots,k)$，则 $u=\sum\limits_{i=0}^{k}u_i$. 由 Leibniz 公式知 $u_i\in H^{m,p}(\Omega)$，且 supp $u_i\subset\tilde{O}_i$，由定理 3.2.4，有

$$\lim_{\delta\to 0}\|J_\delta u_o-u_o\|_{m,p,\Omega}=0$$

对每一个 $u_i(i=1,2,\cdots,k)$，作函数

$$\tilde{u}_i=\begin{cases}u_i & x\in\Omega\\ 0 & x\notin\Omega\end{cases}$$

易知 $\tilde{u}_i\in H^{m,p}(R^n\setminus\partial\tilde{\Omega}_i)$，记

$$u_{i,t}(x)=\tilde{u}_i(x+ty),\quad t>0$$

则 $u_{l,t}(x)\in H^{m,p}(R^n\setminus\bar{\Gamma}_l)$. 在 $L^p(\Omega)$ 中平移是连续的，所以对于 $|\alpha|\leqslant m$，当 $t\to0^+$ 时，在 $L^p(\Omega)$ 中 $\partial^\alpha u_{l,t}\to\partial^\alpha u_l$，因此

$$\lim_{t\to0}\|u_{l,t}-u_l\|_{m,p,\Omega}=0$$

因为$\Omega\subset\subset R^n\setminus\Gamma_t$，由定理3.2.4有

$$\lim_{\delta\to0}\|J_\delta u_{l,t}(x)-u_{l,t}(x)\|_{m,p,\Omega}=0.$$

根据上面两式，可以选出一组 $\delta_l$，$t_l$，当 $l\to\infty$ 时，$\delta_l\to0, t_l\to0^+$，并且成立

$$\lim_{l\to\infty}\|J_{\delta_l}u_{l,t_l}(x)-u_l(x)\|_{m,p,\Omega}=0$$

再注意到 $u_o$ 与其平均函数 $J_\delta u_o$ 在 $H^{m,p}(\Omega)$ 中的关系，则有

$$\lim_{l\to\infty}\|J_{\delta_l}u_o+\sum_{l=1}^{k}J_{\delta_l}u_{l,t_l}-u\|_{m,p,\Omega}=0$$

这里 $J_{\delta_l}u_o+\sum_{l=1}^{k}J_{\delta_l}u_{l,t_l}\in C_o^\infty(R^n)$. 证毕.

当 $\Omega=R^n$ 并且 $1\leqslant p<\infty$ 时，$H_o^{m,p}(R^n)=H^{m,p}(R^n)$. 事实上，这一结果是下面定理的一个推论.

**定理 3.2.9** $1\leqslant p<+\infty$ 时，$C_o^\infty(R^n)$ 在 $H^{m,p}(R^n)$ 中稠密.

**证** 首先，$H^{m,p}(R^n)$ 的每个元素在其范数意义下，都可以用 $H^{m,p}(R^n)$ 中的一个有列紧支集的序列来逼近. 事实上，$\forall u\in H^{m,p}(R^n)$，令 $\{\beta_k\}_{k=1,2,\cdots}$ 是 $C_o^\infty(R^n)$ 中的一个序列，使得在以原点为心，以 $k$ 为半径的球 $B_k(0)$ 上，$\beta_k=1$；在球 $B_{k+1}(0)$ 外，$\beta_k=0$. 又令

$$u_k=\beta_k u\qquad k=1,2,\cdots$$

显然 $u_k\in L^p(R^n)$ 并且在 $L^p(R^n)$ 内 $u_k\to u$. 对所有 $1\leqslant j\leqslant n$，有 $\partial_j u_k=\beta_k\partial_j u+\partial_j\beta_k u$. 因为 $\partial_j u\in L^p(R^n)$，故在 $L^p(R^n)$ 内 $\beta_k\partial_j u\to\partial_j u$. 又因为 $u\in L^p(R^n)$，由 $\beta_k$ 的定义有 $\partial_j\beta_k u\in L^p(R^n)$ 以及

在 $H^{m,p}(R^n)$ 中，当 $k\to\infty$ 时 $u_k\to u$.

从而可以设 $u\in H^{m,p}(R^n)$ 具有列紧支集．构造 $u$ 的平均函数 $J_\rho u$，由定理 3.2.4，$\|u-J_\rho u\|_{m,p,R^n}$，$(\rho\to 0^+)$，另一方面 $J_\rho u\in C_0^\infty(R^n)$. 证毕．

同样可证

**定理 3.2.10** 设 $R_+^n$ 为 $R^n$ 上半空间，则 $C_0^\infty(R^n,R_+^n)$ 在 $H^{m,p}(R_+^n)$ 中稠密 $(1\leqslant p<\infty)$.

下面讨论 Соболев 空间 $H^{m,p}(\Omega)$ 的分解问题．设 $P_{m-1}(\Omega)$ 是由次数不超过 $m-1$ 的多项式组成的 $H^{m,p}(\Omega)$ 的子空间．引入投影算子 $\prod$: $H^{m,p}(\Omega)\to P_{m-1}(\Omega)$，$\prod^2=\prod$. 则我们可以把 $H^{m,p}(\Omega)$ 分解为两个子空间 $P_{m-1}(\Omega)$ 与 $M^{m,p}(\Omega)=H^{m,p}(\Omega)-P_{m-1}(\Omega)$ 的直接和．即如果 $u\in H^{m,p}(\Omega)$，置

$$\hat{\prod}u=u-\prod u=(I-\prod)u$$

显然，$\hat{\prod}^2=(I-\prod)(I-\prod)=I-2\prod+\prod^2=I-\prod=\hat{\prod}$，从而 $\hat{\prod}$: $H^{m,p}(\Omega)\to M^{m,p}(\Omega)$ 也是一个投影算子，而且 $H^{m,p}(\Omega)$ 中每一个元素可以表示为

$$u=\prod u+\hat{\prod}u,\quad \prod u\in P_{m-1}(\Omega),\quad \hat{\prod}u\in M^{m,p}(\Omega)$$

即 $H^{m,p}(\Omega)=P_{m-1}(\Omega)\oplus M^{m,p}(\Omega)$

在 $H^{m,p}(\Omega)$ 中，除了前面已经定义的范数 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 之外，还经常使用半范 $|\cdot|_{m,p,\Omega}$，其定义如下

$$|u|_{m,p,\Omega}^p=\sum_{|\alpha|=m}\|\partial^\alpha u\|_{0,p,\Omega}^p$$

在利用 $H^{m,p}(\Omega)$ 的分解及平均函数的性质后，容易得到下面两个定理，它们刻划了 $H^{m,p}(\Omega)$ 和 $P_{m-1}(\Omega)$ 之间的关系，参看 J.T.Oden[15].

**定理 3.2.11** 设 $u\in H^{m,p}(\Omega)$ 而且 $|u|_{m,p,\Omega}=0$，则函数 $u$ 几乎处

处是一个次数不超过 $m-1$ 次的多项式 .

**定理 3.2.12** 设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界锥区域，则对每一个 $u(x)\in\mathrm{H}^{m,p}(\Omega)$，存在一个次数不超过 $m-1$ 的多项式 $p_{m-1}$，使得

$$|u-p_{m-1}|_{k,p,\Omega}\leqslant c\rho^{m-k}|u|_{m,p,\Omega}\qquad 0\leqslant k\leqslant m-1$$

这里 c 是与包含在 $\Omega$ 中最大的球的半径 $\rho$ 无关的常数.

当 $p=2$ 时，$\mathrm{H}^{m,p}(\Omega)=\mathrm{H}^m(\Omega)$ 是 Hilbert 空间 . 且有

**定理3.2.13** $\mathrm{H}^m(\Omega)=\mathrm{H}_0^m(\Omega)\oplus\mathrm{K}(\Omega)$,

其中 $\mathrm{K}(\Omega)=\{h\in\mathrm{H}^m(\Omega)$: $A_m h=0$，其中 $A_m=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}\partial^{2\alpha}\}$

**证** $\forall\ u\in\mathrm{H}^m(\Omega)$，存在$u_0\in\mathrm{H}_0^m(\Omega)$及$h\in\mathrm{H}^m(\Omega)$使得

$$u=u_0+h,$$

则 $h\in\mathrm{K}(\Omega)$当且仅当$(h,\varphi)_m=0$，$\forall\ \varphi\in\mathrm{D}(\Omega)$，即

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega\partial^\alpha h\cdot\partial^\alpha\varphi dx=0$$

证毕.

由定理3.2.13不难得到$A_m u=A_m u_0$.

## § 3.3 $\mathrm{H}_0^{m,p}(\Omega)$的对偶空间 $\mathrm{H}^{-m,p'}(\Omega)$

从前面的讨论中，我们知道有下列连续嵌入

$$\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)\subset\mathrm{H}_0^{m,p}(\Omega)\subset\mathrm{D}'(\Omega)\qquad 1<p<\infty$$

而且 $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ 在 $\mathrm{H}_0^{m,p}(\Omega)$ 中稠密 .

**定义 3.3.1** 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$，又 E 是一个拓扑向量空间，若

(1) $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)\subset\mathrm{E}\subset\mathrm{D}'(\Omega)$，且有连续的嵌入;

(2) $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$在E中稠密.

则称E是$\Omega$上广义函数的正则空间.

由此可知，$\mathrm{H}_0^{m,p}(\Omega)$ 是广义函数的正则空间，条件 (2) 表明 $\mathrm{H}_0^{m,p}(\Omega)$的对偶$(\mathrm{H}_0^{m,p}(\Omega))'$是$\mathrm{D}'(\Omega)$的一个子空间.

下面将讨论$H_0^{m,p}(\Omega)$的对偶空间的结构.

**引理 3.3.1** 设$1\leqslant p<\infty$，对于每个$l\in(L_N^p)'$有唯一的$v\in L_N^{p'}$与之对应，使得

$$l(u)=\sum_{j=1}^{N}<u_j,v_j>,\quad \forall\ u\in L_N^p$$

这里$<u_j,\ v_j>=\int_\Omega u_j(x)v_j(x)dx$，而且

$$\|l\|_{(L_N^p)'}=\|v\|_{L_N^{p'}} \tag{3.3.1}$$

即，$(L_N^p)'\simeq L_N^{p'}$. 这里$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

**证** 若$1\leqslant j\leqslant N$且$w\in L^p(\Omega)$，设$w_{(j)}=(0,\ \cdots,\ 0,\ w,\ 0)\in L_N^p$，其第$j$个分量为$w$，其余分量都是零．令$l_j(w)=l(w_{(j)})$，则有$l_j\in(L^p(\Omega))'$，由定理 2.3.1 和定理 2.3.2 存在（唯一的）$v_j\in L^{p'}(\Omega)$使得

$$l(w_{(j)})=l_j(w)=<w,v_j>$$

如果 $u\in L_N^p$，则

$$l(u)=l\left(\sum_{j=1}^{N}u_{j(j)}\right)=\sum_{j=1}^{N}l(u_{j(j)})=\sum_{j=1}^{N}<u_j,v_j>$$

利用 Hoelder 不等式，有

$$|l(u)|\leqslant\sum_{j=1}^{N}\|u_j\|_{o,p,\Omega}\|v_j\|_{o,p',\Omega}\leqslant\|u\|_{L_N^p}\|v\|_{L_N^{p'}}$$

从而$\|l\|_{(L_N^p)'}\leqslant\|v\|_{L_N^{p'}}$. 另一方面，有 $\|l\|_{(L_N^p)'}\geqslant\|v\|_{L_N^{p'}}$. 事实上，当$1<p<\infty$，$1\leqslant j\leqslant N$时，设

$$u_j(x)=\begin{cases}|v_j(x)|^{p'-2}\cdot\overline{v_j(x)} & \text{当}v_j(x)\neq0\\ 0 & ,\quad x\text{在其它处}\end{cases}$$

容易验证$|l(u_1,\ \cdots,\ u_N)|=\|v\|_{L_N^{p'}}^{p'}=\|u\|_{L_N^p}\|v\|_{L_N^{p'}}$. 即

$$\|l\|_{(L_N^p)'}\geqslant\|v\|_{L_N^{p'}}$$

当 $p=1$ 时，我们选 $k$，使得 $\|v_k\|_{0,\infty,\Omega}=\max\limits_{0\leqslant j\leqslant N}\|v_j\|_{0,\infty,\Omega}$，对任何 $\varepsilon>0$，存在一个体积有限且非零的可测集 $A\subset\Omega$，使得对于 $x\in A$，有 $|v_k(x)|\geqslant\|v_k\|_{0,\infty,\Omega}-\varepsilon$. 令

$$u(x)=\begin{cases}\overline{v_k(x)}/|v_k(x)| & 当x\in A\quad 且v_k(x)\neq 0\\ 0 & 当x在\Omega的其它处\end{cases}$$

则 $l(u_{(k)})=<u,v_k>=\int_A|v_k(x)|dx$

$$\geqslant(\|v_k\|_{0,\infty,\Omega}-\varepsilon)\|u\|_{0,1,\Omega}=(\|v\|_{L_N^{p'}}-\varepsilon)\|u_{(k)}\|_{L_N^1}$$

由于 $\varepsilon$ 的任意性，有 $\|l\|_{(L_N^1)'}\geqslant\|v\|_{L_N^{p'}}$. 证毕.

**定理 3.3.1** 设 $1\leqslant p<\infty$，对于每个 $l\in\left(H^{m,p}(\Omega)\right)'$ 存在一个元素 $v\in L_N^{p'}$，使得把向量 $v$ 写成 $(v_\alpha)_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}$ 的形式时，有

$$l(u)=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}<\partial^\alpha u,v_\alpha>\quad\forall u\in H^{m,p}(\Omega)\tag{3.3.2}$$

而且

$$\|l\|_{(H^{m,p}(\Omega))'}=\inf\ \|v\|_{L_N^{p'}}=\min\ \|v\|_{L_N^{p'}}\tag{3.3.3}$$

下确界是在对于一切 $v\in H^{m,p}(\Omega)$ 使得 (3.3.2) 成立的所有的 $v\in L_N^{p'}$ 构成的集合上取的，而且一定在这个集合上取到.

**证** 定义线性泛函 $l^*$：

$$l^*(Pu)=l(u)\quad u\in H^{m,p}(\Omega)$$

这里 $Pu=(\partial^\alpha u)_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}$，与 § 3.2 一样，注意到 $\|Pu\|_{L_N^p}=\|u\|_{m,p,\Omega}$，即 $P$ 是 $H^{m,p}(\Omega)$ 到 $L_N^p$ 的闭子空间 W 的一个等距同构 $l^*\in W'$，而且

$$\|l^*\|_{W'}=\|l\|_{(H^{m,p}(\Omega))'}.$$

由 Hahn—Banach 定理，存在一个 $l^*$ 到 $L_N^p$ 全体的保范延拓 $\tilde{l}$，由引理 3.3.1，存在 $v\in L_N^{p'}$ 使得如果 $u=(u_\alpha)_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\in L_N^p$，则

$$\tilde{l}(u)=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}<u_\alpha,v_\alpha>$$

因此对于$u\in H^{m,p}(\Omega)$，有

$$l(u)=l^*(Pu)=\tilde{l}(Pu)=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}<\partial^\alpha u,v_\alpha>$$

而且

$$\|l\|_{(H^{m,p}(\Omega))'}=\|l^*\|_{W'}=\|\tilde{l}\|_{(L^p_N)'}=\|v\|_{L^{p'}_N} \tag{3.3.4}$$

那么对一切 $u\in H^{m,p}(\Omega)$ 使 (3.3.2) 成立的任何元素 $v\in L^{p'}_N$ 与 $l^*$ 的一个延拓 $l$ 相对应，所以

$$\|v\|_{L^{p'}_N}\geqslant\|l\|_{(H^{m,p}(\Omega))'}$$

再注意到(3.3.4)，则有(3.3.3)．证毕．

**定理 3.3.2** 对于 $1\leqslant p<\infty$，对偶空间 $(H^{m,p}_0(\Omega))'$ 等距同构于 $W^{-m,p'}(\Omega)(1/p+1/p'=1)$. 这里 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 是

$$T=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha T_{v_\alpha},\{T_{v_\alpha}(\varphi)=<\varphi,v_\alpha>,\forall\varphi\in D(\Omega)\} \tag{3.3.5}$$

在范数$\|T\|=\inf\{\|v\|_{L^{p'}_N}\}$下的闭包．

证　首先证明对于 $1\leqslant p<\infty$，空间 $(H^{m,p}(\Omega))'$ 的每一个元素 $l$ 是一个广义函数 $T\in D'(\Omega)$ 在 $H^{m,p}(\Omega)$ 上的延拓．事实上，设 $l$ 是对某个 $v\in L^{p'}_N$ 由 (3.3.2) 给出的，而且 $T_v$，$T\in D'(\Omega)$ 满足 (3.3.5)，即

$$T_{v_\alpha}(\varphi)=<\varphi,v_\alpha>,\quad\varphi\in D(\Omega),\quad 0\leqslant|\alpha|\leqslant m$$

$$T=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha T_{v_\alpha}$$

则　$\forall\varphi\in D(\Omega)\subset H^{m,p}(\Omega)$　有

$$T(\varphi)=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}T_{v_\alpha}(\partial^\alpha\varphi)=l(\varphi)$$

所以 $l$ 显然是 T 的一个延拓，而且按照(3.3.3)有

$\|l\|_{(H^{m,p}(\Omega))'}=\min\{\|v\|_{L^{p'}_N}$：对 (3.3.5) 给出的 $T\}$.

对于 $l\in(\mathrm{H}_0^{m,p}(\Omega))'$，可以有同样的结论，因为任何这样的泛函有一个到 $\mathrm{H}^{m,p}(\Omega)$ 的保范延拓．

现在设 $T$ 是 $\mathrm{D}'(\Omega)$ 中满足 (3.3.5) 的广义函数，则 $T$ 在 $\mathrm{H}^{m,p}(\Omega)$ 上的连续延拓可能不是唯一的，但是可以证明 $T$ 在 $\mathrm{H}_0^{m,p}(\Omega)$ 上的连续延拓是唯一的．事实上，当 $u\in\mathrm{H}_0^{m,p}$ 时，设 $\{\varphi_n\}$ 是 $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$( 或 $\mathrm{D}(\Omega)$) 中的一个序列，使得当 $n\to\infty$ 时，$\|\varphi_n-u\|_{m,p,\Omega}\to 0$. 那么当 $k$，$n\to\infty$ 时，

$$
\begin{aligned}
|T(\varphi_k)-T(\varphi_n)| &\leqslant \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}|T_{v_\alpha}(\partial^\alpha\varphi_k-\partial^\alpha\varphi_n)| \\
&\leqslant \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|\partial^\alpha(\varphi_k-\varphi_n)\|_{o,p,\Omega}\|v_\alpha\|_{0,p',\Omega} \\
&\leqslant \|\varphi_k-\varphi_n\|_{m,p,\Omega}\|v\|_{L_N^{p'}}\to 0
\end{aligned}
$$

所以 $\{T(\varphi_n)\}$ 是数域 $K$ 中的 Cauchy 序列，设它收敛到极限 $l(u)$. 另一个方面，如果另有 $\{\psi_n\}\subset\mathrm{D}(\Omega)$ 而且 $\|\psi_n-u\|_{m,p,\Omega}\to 0$，则当 $n\to\infty$ 时，$T(\varphi_n)-T(\psi_n)\to 0$. 这样定义的泛函 $l$ 是线性的而且属于 $(\mathrm{H}_0^{m,p}(\Omega))'$. 事实上，$u=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n$，则有

$$
\begin{aligned}
|l(u)| &= \lim_{n\to\infty}|T(\varphi_n)|\leqslant \lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|_{m,p,\Omega}\|v\|_{L_N^{p'}} \\
&= \|u\|_{m,p,\Omega}\|v\|_{L_N^{p'}}
\end{aligned}
$$

从而定理得证.

定理 3.3.2 说明一个 $\Omega$ 上的广义函数 $T\in\mathrm{D}'(\Omega)$ 属于 $\mathrm{W}^{-m,p'}(\Omega)$ 的充要条件是 (3.3.5) 成立．

设$1<p<\infty$，每个元素$v\in\mathrm{L}^{p'}(\Omega)$通过

$$l_v(u)=\langle u,v\rangle$$

确定$(\mathrm{H}_0^{m,p}(\Omega))'$中的一个元素$l_v$，因为

$$|l_v(u)|=|\langle u,v\rangle|\leqslant\|v\|_{0,p',\Omega}\|u\|_{o,p,\Omega}\leqslant\|v\|_{o,p',\Omega}\|u\|_{m,p,\Omega}$$

**定义 3.3.2** 定义 $l_v\in(\mathrm{H}_0^{m,p}(\Omega))'$ 的范数为 $v\in\mathrm{L}^{p'}(\Omega)$ 的 $(-m,p')$

范数，即

$$\|v\|_{-m,p',\Omega}=\|l_v\|_{(H_0^{m,p}(\Omega))'}=\sup_{\substack{u\in H_0^{m,p}(\Omega)\\ \|u\|_{m,p,\Omega}\leq 1}}|<u,v>| \tag{3.3.6}$$

显然，$\forall u\in H_0^{m,p}(\Omega)$和$v\in L^{p'}(\Omega)$，$\|v\|_{-m,p',\Omega}\leqslant\|v\|_{0,p',\Omega}$

$$|<u,v>|\leqslant\|u\|_{m,p,\Omega}\|v\|_{-m,p',\Omega} \tag{3.3.7}$$

设 $V=\{l_v: v\in L^{p'}(\Omega)\}$，$V$ 是 $(H_0^{m,p}(\Omega))'$ 的向量子空间而且 $V$ 在$(H_0^{m,p}(\Omega))'$ 中稠密．事实上只要证明，如果 $F\in(H_0^{m,p}(\Omega))''$ 满足 $F(l_v)=0$，$\forall\ l_v\in V$，就有 $F=0$. 因为 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 是自反的，故存在 $f\in H_0^{m,p}(\Omega)$ 使得

$$<f,v>=l_v(f)=F(l_v)=0\quad\forall v\in L^{p'}(\Omega)$$

因为 $f\in L^p(\Omega)$，所以在 $\Omega$ 中 $f(x)=0(a.e)$. 因此在 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 中 $f=0$.从而在 $(H_0^{m,p}(\Omega))''$ 中 $F=0$.

定义 3.3.3　$H^{-m,p'}(\Omega)$ 表示 $L^{p'}(\Omega)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{-m,p',\Omega}$ (即(3.3.6)式)的完备化.

根据定理 3.3.2，定义 3.3.3 我们有

$$H^{-m,p'}(\Omega)\simeq(H_0^{m,p}(\Omega))'\simeq W^{-m,p'}(\Omega)$$

特别地，对于每个 $v\in H^{-m,p'}(\Omega)$，存在 $T_v\in W^{-m,p'}(\Omega)$ 使得对一切 $\varphi\in D(\Omega)$ 和一切使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|v_n-v\|_{-m,p',\Omega}=0$ 的序列 $\{v_n\}\subset L^{p'}(\Omega)$,有

$T_v(\varphi)=\lim\limits_{n\to\infty}<\varphi,v_n>$. 反之，$\forall T\in W^{-m,p'}(\Omega)$，存在某个 $v\in H^{-m,p'}(\Omega)$ 使得 $T=T_v$，而且由 (3.3.7) 式，$|T_v(\varphi)|\leqslant\|\varphi\|_{m,p,\Omega}\|v\|_{-m,p',\Omega}$.

从而有

定理 3.3.3　当 $1<p<\infty$ 时，$(H_0^{m,p}(\Omega))'\simeq H^{-m,p'}(\Omega)$.

定理 3.3.4　$H^{-m,p'}(\Omega)$ $(1<p'<\infty)$是可分的和自反的．

定理 3.3.5　$C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^{-m,p'}(\Omega)$ 中稠密．

注意到 $1 \leqslant p' < \infty$，$C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中的稠密性及 $H^{-m,p'}(\Omega)$ 的定义即可得到上述三个定理.

如前所述，当 $\Omega = R_+^n$ 或 $R^n$ 时，有 $H^{m,p}(\Omega) = H_0^{m,p}(\Omega)$. 那么是否还存在别的条件，同样有 $H^{m,p}(\Omega) = H_0^{m,p}(\Omega)$. 利用 $H^{-m,p'}(\Omega)$ 中广义函数，可以给出其充要条件，这里以 $p' = 2$ 为例给出

**定理 3.3.6** 设 $\Omega$ 是 $R^n$ 中非空的开集，$m$ 是大于零的整数，则 $H^m(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ 的充要条件是 $R^n \setminus \Omega$ 满足：

**$R^n$ 上的其列紧支集在 $R^n \setminus \Omega$ 中的广义函数，除零以外，不属于 $H^{-m}(R^n)$.**

## §3.4 内插不等式和延拓性质

### 1. 内插不等式

对于 $u \in H^{m,p}(\Omega)$，考虑以半范数 $|u|_{m,p,\Omega}$ 来确定中间导数 $\partial^\beta u(|\beta| \leqslant m)$ 的 $L^p$ 范数的上界问题. 即建立形为

$$|u|_{j,p} \leqslant k\varepsilon|u|_{m,p} + k\varepsilon^{-j/(m-j)}|u|_{0,p} \tag{3.4.1}$$

的内插不等式，其中 $0 \leqslant j \leqslant m-1$. 它将导出在对区域某些限制下，如是有界的，则对 $H_0^{m,p}(\Omega)$，半范 $|\cdot|_{m,p}$ 和全范 $\|\cdot\|_{m,p}$ 是等价的非常有用的结论.

我们首先讨论一般情况下的内插不等式，然后讨论包含紧子区域的内插不等式.

**引理 3.4.1** 设 $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$，$1 \leqslant p < \infty$，$0 < \varepsilon_0 < \infty$. 那么存在连续地依赖于 $b-a$ 有限常数 $k = k(\varepsilon_0, p, b-a)$，使对所有满足 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 的 $\varepsilon$，以及对所有在开区间 $(a, b)$ 上二次连续可微的函数 $f$，成立

$$\int_a^b |f'(t)|^p dt \leqslant k\varepsilon \int_a^b |f''(t)|^p dt + k\varepsilon^{-1} \int_a^b |f(t)|^p dt. \tag{3.4.2}$$

并且，如果 $b-a = \infty$，则可找到 $k = k(p)$ 使(3.4.2)对所有的正数 $\varepsilon$ 成立.

**证** 不失一般性，假定 $\varepsilon_0 = 1$，因为假定引理在 $\varepsilon_0 = 1$ 时成立，

由于 $0<\varepsilon/\varepsilon_0<1$，由(3.4.2)有

$$\int_a^b |f'(t)|^p dt \leqslant k(\varepsilon/\varepsilon_0)\int_a^b |f''(t)|^p dt + k(\varepsilon_0/\varepsilon)\int_a^b |f(t)|^p dt.$$

从而，它导出 $\varepsilon_0$ 不为 1 时的 (3.4.2)，$k=k(\varepsilon_0,p,b-a)=k(1,p,b-a)\max(\varepsilon_0,\varepsilon_0^{-1})$. 因此只要假定 $f$ 为实值并且 $\varepsilon_0=1$.

先假定 $a=0$ 和 $b=1$. 如果 $0<\xi<\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}<\eta<1$，则存在 $\lambda\in(\xi,\eta)$ 使得

$$|f'(\lambda)|=\left|\frac{f(\eta)-f(\xi)}{\eta-\xi}\right|\leqslant 3|f(\xi)|+3|f(\eta)|$$

因此对任意的 $x\in(0,1)$

$$\begin{aligned}|f'(x)|&=\left|f'(\lambda)+\int_\lambda^x f''(t)dt\right|\\&\leqslant 3|f(\xi)|+3|f(\eta)|+\int_0^1|f''(t)dt|\end{aligned}$$

对 $\xi$ 在 $\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$ 上和对 $\eta$ 在 $\left(\frac{2}{3},\ 1\right)$ 上积分以上不等式得

$$\begin{aligned}\frac{1}{9}|f'(x)|&\leqslant\int_0^{\frac{1}{3}}|f(\xi)|d\xi+\int_{\frac{2}{3}}^1|f(\eta)|d\eta+\frac{1}{9}\int_0^1|f''(t)|dt\\&\leqslant\int_0^1|f(t)|dt+\frac{1}{9}\int_0^1|f''(t)|dt.\end{aligned}$$

当 $p>1$ 时，由 Hoelder 不等式以及 $p=1$ 时，显然有

$$|f'(x)|^p\leqslant 2^{p-1}\cdot 9^p\int_0^1|f(t)|^p dt+2^{p-1}\int_0^1|f''(t)|^p dt$$

因此有

$$\int_0^1|f'(t)|^p dt\leqslant k_p\int_0^1|f''(t)|^p dt+k_p\int_0^1|f(t)|^p dt$$

$$\int_0^1 |f'(t)|^p dt \leqslant k_p \int_0^1 |f''(t)|^p dt + k_p \int_0^1 |f(t)|^p dt$$

其中 $k_p = 2^{p-1} \cdot 9^p$.

其次对任意有限区间$(a, b)$，由变量替换 $x = a + t(b-a)$得

$$\int_a^b |f'(t)|^p dt \leqslant k_p (b-a)^p \int_a^b |f''(t)|^p dt$$

$$+ k_p (b-a)^{-p} \int_a^b |f(t)|^p dt \tag{3.4.3}$$

因为$0 < \varepsilon \leqslant 1$，所以存在正整数n，使得

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{1/p} \leqslant 1/n \leqslant \varepsilon^{1/p}$$

把区间$(a, b)$分为$n$等分，节点$a_j = a + (b-a)j/n (j = 0, 1, \cdots n)$. 于是(3.4.3)为

$$\int_a^b |f'(t)|^p dt = \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} |f'(t)|^p dt$$

$$\leqslant K_p \sum_{j=1}^n \left\{ \left(\frac{b-a}{n}\right)^p \int_{a_{j-1}}^{a_j} |f''(t)|^p dt \right.$$

$$\left. + \left(\frac{n}{b-a}\right)^p \int_{a_{j-1}}^{a_j} |f(t)|^p dt \right\}$$

$$\leqslant \tilde{K}(p, b-a) \left\{ \varepsilon \int_a^b |f''(t)|^p dt + \varepsilon^{-1} \int_a^b |f(t)|^p dt \right\} \tag{3.4.4}$$

其中$\tilde{k}(p, b-a) = k_p \max[(b-a)^p, 2^p (b-a)^{-p}]$.

现设

$$k(1, p, b-a) = \begin{cases} \max\limits_{1 \leqslant s \leqslant 2} \tilde{k}(p, s) & \text{如果 } b-a \geqslant 1 \\ \max\limits_{b-a \leqslant s \leqslant 2} \tilde{k}(p, s) & \text{如果 } 0 < b-a < 1 \end{cases}$$

每一个子区间，求和得(3.4.2).

最后，设 $b-a=\infty$.不妨设 $a$ 有限和 $b=\infty$.对给定的 $\varepsilon>0$，设 $a_j=a+j\varepsilon^{1/p}$，(j=0，1，2，…)，则 $a_j-a_{j-1}=\varepsilon^{1/p}$，由(3.4.3)得

$$\int_a^\infty |f'(t)|^p dt=\sum_{j=1}^\infty\int_{a_{j-1}}^{a_j}|f'(t)|^p dt$$

$$\leqslant k_p\varepsilon\sum_{j=1}^\infty\int_{a_{j-1}}^{a_j}|f''(t)|^p dt$$

$$+k_p\varepsilon^{-1}\sum_{j=1}^\infty\int_{a_{j-1}}^{a_j}|f(t)|^p dt$$

此即(3.4.2)，其中 $k=k_p$，只依赖于 $p$. 证毕.

对于形如(3.4.1)的内插不等式，一般地只要证明 $j=1$，$m=2$ 时的情况就可以了.

**定理 3.4.1** 存在常数 $k=k(m,p,n)$，那么对 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$，$\forall\varepsilon>0$，$0\leqslant j\leqslant m-1$，和 $\forall u\in \mathrm{H}_0^{m,p}(\Omega)$，有

$$|u|_{j,p,\Omega}\leqslant k\varepsilon|u|_{m,p,\Omega}+k\varepsilon^{-j/(m-j)}|u|_{o,p,\Omega} \tag{3.4.5}$$

**证** 引入映射 $u\to\tilde u$ 表示 $u$ 在区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 外的零延拓:

$$\tilde u(x)=\begin{cases}u(x) & \text{当}x\in\Omega\text{时}\\ 0 & \text{当}x\notin\Omega\text{时}\end{cases}$$

由 $\mathrm{H}^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 的定义易知，该映射把 $\mathrm{H}_0^{m,p}(\Omega)$ 等距地映射 $\mathrm{H}^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 中去. 因此只要对 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 以及 $j=1$，$m=2$ 的情况进行讨论即可.

对于任意的 $\varepsilon>0$ 和 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，由引理 3.4.1 得

$$\int_{-\infty}^\infty|\partial_j\varphi(x)|^p dx_j\leqslant k\varepsilon^p\int_{-\infty}^\infty|\partial_j^2\varphi(x)|^p dx_j$$

$$+k\varepsilon^{-p}\int_{-\infty}^\infty|\varphi(x)|^p dx_j$$

对 x 的其它分量积分，有

$$\|\partial_j\varphi\|_p^p\leqslant k\varepsilon^p\|\partial_j^2\varphi\|_p^p+k\varepsilon^{-p}\|\varphi\|_p^p,\qquad 1\leqslant j\leqslant n.$$

取遍 1 到 n 且求和，有

$$|\varphi|_{1,p}^p \leq k\varepsilon^p \sum_{j=1}^n \|\partial_j^2\varphi\|_p^p + nk\varepsilon^{-p}|\varphi|_{0,p}^p$$

$$\leq k\varepsilon^p|\varphi|_{2,p}^p + nk\varepsilon^{-p}|\varphi|_{0,p}^p$$

取 $p$ 次方根并注意到 $C_0^\infty(R^n)$ 在 $H^{m,p}(R^n)$ 内稠密即可得 (3.4.5) 在 $j=1$，$m=2$的情况．证毕．

**定理 3.4.2** 设 $\Omega$ 是 $R^n$ 内具有锥性质的有界区域，并且设 $\varepsilon_0$ 是有限正数，则存在常数 $k=k(\varepsilon_0, m, p, \Omega)$，使对任意的 $\varepsilon$，$0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$，任意的整数 $j$，$0\leq j\leq m-1$ 以及任意的 $u\in H^{m,p}(\Omega)$，有

$$|u|_{j,p,\Omega} \leq k\varepsilon|u|_{m,p,\Omega} + k\varepsilon^{-j/(m-j)}|u|_{0,p,\Omega}$$

证明见 Adams[2].

**推论 3.4.1** 在下列空间上:

(1) $H_0^{m,p}(\Omega)$ 对任意区域 $\Omega$,

(2) $H^{m,p}(\Omega)$ 对任意具有界锥性质的区域 $\Omega$，由

$$((u))_{m,p,\Omega} = \{|u|_{m,p,\Omega}^p + |u|_{0,p,\Omega}^p\}^{1/p}$$

定义的泛函 $((\cdot))_{m,p,\Omega}$ 是与通常范数 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 等价的范数．

**定理 3.4.3** 设 $\Omega$ 是有限宽区域，即它在两个平行超平面之间，则 Friedrichs 不等式成立，即对于 $1\leq p<\infty$

$$\|u\|_{0,p,\Omega} \leq k(\Omega)|u|_{1,p,\Omega} \quad \forall\ u\in H_0^{m,p}(\Omega) \tag{3.4.6}$$

其中 $k(\Omega)$是只与区域 $\Omega$ 有关的常数.

**证** 不失一般性，设 $\Omega$ 在超平面 $x_n=0$ 和 $x_n=d$ 之间.令 $x=(x',x_n)$，其中 $x'=(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$.对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，有

$$\varphi(x)=\int_0^{x_n}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x',t)dt$$

由 Hoelder 不等式，当 $1<p$ 时，有

$$|\varphi(x)| \leq |x_n|^{1/q}\left|\int_0^{x_n}|\partial_t\varphi(x',t)|^p dt\right|^{1/p}, \qquad 1/p+1/q=1$$

而当 $1\leq p<\infty$时，有

$$|\varphi(x)|^p \leqslant |x_n|^{(p-1)} \cdot \left(\int_0^{x_n} |\partial_t \varphi(x',t)|^p dt\right)$$

在 $\Omega$ 上求积分，有

$$\|\varphi\|_{0,p,\Omega}^p \leqslant \int_{\mathbf{R}^{n-1}\cap\Omega} dx' \int_0^d |x_n|^{p-1} dx_n \int_0^d |\partial_t \varphi(x',t)|^p dt$$

$$\leqslant \frac{d^p}{p} |\varphi|_{1,p,\Omega}^p,$$

记 $k(\Omega) = d^p / p$ ，此即 (3.4.6). 又 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 中稠密，所以在 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 中 (3.4.6) 也成立． 证毕．

由定理 3.4.3 反复运用(3.4.6)式，有

**定理 3.4.4** 如果 $\Omega$ 是有界的，则半范 $|\cdot|_{m,p,\Omega}$ 与全范 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 是空间 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 的等价范数．即存在常数 $k(\Omega)$，使得

$$|u|_{m,p,\Omega} \leqslant \|u\|_{m,p,\Omega} \leqslant k(\Omega)|u|_{m,p,\Omega} \quad \forall u\in H_0^{m,p}(\Omega)$$

这是因为在 $\Omega$ 中每个变量都是有限的，故可以连续地应用一维的 Friedrichs 不等式.

**定理 3.4.5** 对于 $1\leqslant p<\infty$，如果

(1) $\Omega\subset \mathbf{R}^n$，对于 $u\in H_0^{m,p}(\Omega)$，存在与 $\Omega$ 无关的常数 $k=k(m，p，n)$，或

(2) $\Omega\subset \mathbf{R}^n$ 是有界且具有锥性质，对于 $u\in H^{m,p}(\Omega)$，存在常数 $k=k(m，p，\Omega)$，使得对 $0\leqslant j\leqslant m$ 有

$$\|u\|_{j,p,\Omega} \leqslant k\|u\|_{m,p,\Omega}^{j/m} \cdot \|u\|_{0,p,\Omega}^{1-j/m} \qquad (3.4.7)$$

**证** 对于 $j=0$ 或 $j=m$，(3.4.7)显然成立.对于 $0<j<m$，由定理 3.4.1 和定理 3.4.2，有

$$\|u\|_{j,p,\Omega} \leqslant k_1\varepsilon\|u\|_{m,p,\Omega} + k_1\varepsilon^{-j/(m-j)}\|u\|_{0,p,\Omega} \qquad (3.4.8)$$

对于所有 $\varepsilon$，$0<\varepsilon\leqslant 1$，以及所有 $u\in H_0^{m,p}(\Omega)$ 成立，$k_1$ 只赖于 $m$、$p$、$n$(同样的不等式对 $u\in H^{m,p}(\Omega)$ 成立，但 $k_1$ 依赖于 $m$，$p$ 和 $\Omega$). 如果在 (3.4.8) 中令

$$\varepsilon = (\|u\|_{0,p,\Omega} / \|u\|_{m,p,\Omega})^{(m-j)/m}$$

则对 $u\neq0$ 得到不等式(3.4.7). 证毕.

(3.4.7)同样代数地蕴涵(3.4.8).特别地，对于

$$ab \leqslant (a^p / p) + (b^{p'} / p') \quad (1/p + 1/p' = 1)$$

令 $p = m/j$，$p' = m/(m-j)$，$a = (\varepsilon\|u\|_{m,p,\Omega})^{j/m}$ 和

$b = \varepsilon^{-j/m}\|u\|_{0,p,\Omega}^{(m-j)/m}$，则可由(3.4.7)得出(3.4.8).

以下接着讨论包含紧子区域的内插不等式．即对于 $u\in\mathbf{H}^{m,p}(\Omega)$，其中间导数 $\partial^\beta u(|\beta|\leqslant m-1)$ 的 $\mathbf{L}^p(\Omega)$ 范数的上界可以由半范数 $|u|_{m,p,\Omega}$ 和 $u$ 在一个适当的子区域上的 $\mathbf{L}^p$ 范数表示出来，这个子区域的闭包是有界区域 $\Omega$ 的紧子集．此类不等式建立的方法与上面推导内插不等式基本一致．

**引理 3.4.2** 设$(a, b)$是 $\mathbf{R}$ 上的有限开区间并且设 $1\leqslant p<\infty$. 则存在有限常数 $k=k(p, a-b)$，并且对所有的正数 $\varepsilon$，存在数 $\delta=\delta(\varepsilon, b-a)$满足 $0<2\delta<b-a$，使所有的$(a, b)$上的连续可微函数 $f$ 满足

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \leqslant k\varepsilon\int_a^b |f'(t)|^p dt + k\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(t)|^p dt \tag{3.4.9}$$

此外，可以选与 $b-a$ 无关的 $k$ 和 $\delta$ 的固定值使 (3.4.9) 对所有的区间 $(a, b)$ 都成立，只要区间的长度在两个固定的正数之间，即 $0<l_1\leqslant b-a<l_2<\infty$.

**证** 与引理 3.4.1 类似，先假设 $a=0$ 和 $b=1$，并且令$\frac{1}{3}<\eta<\frac{2}{3}$. 如果 $0<x<1$，则

$$|f(x)| = |f(\eta) + \int_\eta^x f'(t)dt| \leqslant |f(\eta)| + \int_0^1 |f'(t)|dt$$

在$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$上对$\eta$积分，有

$$|f(x)| \leqslant 3\int_{1/3}^{2/3} |f(\eta)|d\eta + \int_0^1 |f'(t)|dt$$

由 Hoelder 不等式有

$$|f(x)|^p \leqslant 3^p \cdot 2^{p-1}\int_{1/3}^{2/3} |f(t)|^p dt + 2^{p-1}\int_0^1 |f'(t)|^p dt$$

在(0，1)上对 $x$ 积分，得

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt \leqslant k_p\int_0^1 |f'(t)|^p dt + K_p\int_{1/3}^{2/3} |f(t)|^p dt$$

其中 $K_p = 3^p \cdot 2^{p-1}$. 作变量替换 $a + t(b-a) \to t$ 得到在任意的有限区间 $(a,\ b)$ 上，

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \leqslant k_p(b-a)^p\int_a^b |f'(t)|^p dt + K_p\int_{a+(b-a)/3}^{b-(b-a)/3} |f(t)|^p dt$$

对于给定的 $\varepsilon > 0$，取正整数 $n$ 使 $n^{-p} \leqslant \varepsilon$. 设 $a_j = a + (b-a)j/n(j=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$，并且取 $\delta$ 使 $0 < \delta \leqslant (b-a)/3n$. 则

$$\int_a^b |f(t)|^p dt = \sum_{j=1}^{n}\int_{a_{j-1}}^{a_j} |f(t)|^p dt$$

$$\leqslant k_p\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{b-a}{n}\right)^p\int_{a_{j-1}}^{a_j} |f'(t)|^p dt + \int_{a_{j-1}+\delta}^{a_j-\delta} |f(t)|^p dt\right\}$$

$$\leqslant k_p\max(1,(b-a)^p)\left\{\varepsilon\int_a^b |f'(t)|^p dt + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(t)|^p dt\right\}$$

此即所求不等式. 证毕.

**定理 3.4.6** 设 $\Omega$ 是 L 型区域，则存在常数 $K = K(p,\ \Omega)$使

得对任意 $\varepsilon>0$，对应于一个区域 $\Omega_\varepsilon$ 紧嵌入 $\Omega$，有

$$|u|_{\alpha,p,\Omega}\leqslant K\varepsilon|u|_{1,p,\Omega}+K|u|_{0,p,\Omega_\varepsilon} \tag{3.4.10}$$

对所有的 $u\in H^{1,p}(\Omega)$ 成立．

**证** 因为 $\Omega$ 是 L 型区域，因此存在 $k$ 个开集 $O_1,O_2,\cdots,O_k$，满足 $\partial\Omega\subset\bigcup_{i=1}^{k}O_i$，以及一组开集 $\tilde{O}_i$，使得 $\tilde{O}_i\subset O_i$，并且有 $\partial\Omega\subset\bigcup_{i=1}^{k}\tilde{O}_i$．$\partial\Omega_i=O_i\bigcap\partial\Omega$，$\partial\Omega_i$ 在局部坐标系中可用满足 Lipschitz 条件的函数来表示，在每个 $\partial\Omega_i$ 的局部坐标系 $(\xi'_i,\xi_{ni})$（这里 $\xi'=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1})$）中，取一向量 $y_i$ 与 $\xi_{ni}$ 平行，使得 $y$ 的正向指向 $\Omega$ 的内部．由此 $\partial\Omega$ 的局部有限开覆盖 $\{O_i\}$，$\{\tilde{O}_i\}$ 及 $\{y_i\}$ 都是有限集合．又对 $\delta>0$，定义 $\Omega_\delta=\{x\in\Omega:\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)<\delta\}\subset\bigcup_i\tilde{O}_i$．由 $\{\tilde{O}_i\}$ 的性质，可知 $\Omega=\bigcup_i(\tilde{O}_i\bigcap\Omega)\bigcup\tilde{\Omega}$，其中 $\tilde{\Omega}$ 紧嵌入 $\Omega$．所以只须证明对每一个 $i$ 和对某一个 $\Omega_{\varepsilon i}$ 紧嵌入 $\Omega$，有

$$|u|^p_{0,p,\tilde{O}_i\bigcap\Omega}\leqslant K_1\varepsilon^p|u|^p_{1,p,\Omega}+K_1|u|^p_{0,p,\Omega_\varepsilon,i}$$

即可．为了简单起见，我们略去所有的下标 $i$．

考虑集合 $Q$，$Q_\eta(0\leqslant\eta<1)$，其定义为

$$Q=\{x+ty:\ x\in O\bigcap\Omega,\ 0<t<1\},$$

$$Q_\eta=\{x+ty:\ x\in\tilde{O}\bigcap\Omega,\ \eta<t<1\},$$

当 $y$ 的长度足够小时，对任意 $0<t<1$，有 $x+ty\in\Omega$，$\forall x\in\overline{\Omega}\bigcap\tilde{O}$．如果 $\eta>0$，$Q_\eta$ 紧嵌入 $Q$．由 $\Omega$ 的 L 型性质，$Q\subset\Omega$ 并且任意平行于 $y$、且过 $\tilde{O}\bigcap\Omega$ 上一点的直线 $l$ 与 $Q$ 交于一个或几

个区间，每个区间的长度在 $|y|$ 与 diam $\Omega$ 之间，由引理3.4.2存在 $\eta>0$ 和常数 $K_1$ 使对任意的 $u\in C^{\infty}(\Omega)$ 和任意这样的直线 $l$

$$\int_{l\cap Q}|u(x)|^p ds\leqslant K_1\varepsilon^p\int_{l\cap Q}|D_y u(x)|^p ds+K_1\int_{l\cap Q_\eta}|u(x)|^p ds$$

$D_y$ 表示在 $y$ 的方向求导．把 $Q$ 投影在垂直于 $y$ 的超平面上，在此投影上积分上述不等式，得

$$|u|^p_{o,p,\Omega\cap\bar{\sigma}}\leqslant|u|^p_{o,p,Q_o}\leqslant K_1\varepsilon^p|u|^p_{1,p,Q_o}+K_1|u|^p_{o,p,Q_\eta}$$

$$\leqslant K_1\varepsilon^p|u|^p_{1,p,\Omega}+K_1|u|^p_{o,p,\Omega_\varepsilon},$$

其中 $\Omega_\varepsilon=\Omega_\eta$ 紧嵌入 $\Omega$．由稠密性，这个不等式对任意的 $u\in H^{1,p}(\Omega)$ 都成立． 证毕．

**定义3.4.1** 称 $\Omega$ 是 $C^k$ 型区域，如果满足：

(1) $\Omega$ 是 $R^n$ 中的有界开集，$\Omega$ 在边界 $\partial\Omega$ 的一侧；

(2) 存在有限个开集 $O_1$，…，$O_m$，且 $\Omega$ 的边界 $\partial\Omega\subset\bigcup_{j=1}^{m}O_j$；

(3) 存在 $n$ 维向量函数 $\varphi_j(x)=(\varphi_{j1}(x),\ \cdots,\ \varphi_{jn}(x))$ 和 $\psi_j(y)=(\psi_{j1}(y),\ \cdots,\ \psi_{jn}(y))(j=1,2,\cdots,m)$ 使得

(1°) $\varphi_j$ 把 $O_j$ 映照到 $Q=\{y=(y',y_n)\in R^n:|y'|<1,\ -1<y_n<1\}$ 上，而 $\psi_j$ 把 $Q$ 映照到 $O_j$ 上；

(2°) $\varphi_j$ 把 $O_j\cap\Omega$ 映照到 $Q_+=\{y\in Q:y_n>0\}$ 上，$\psi_j$ 把 $Q_+$ 映照到 $O_j\cap\Omega$ 上；

(3°) $\varphi_j$ 把 $O_j\cap\partial\Omega$ 映照到 $Q_0=\{y\in Q:y_n=0\}$ 上，$\psi_j$ 把 $Q_0$ 映照到 $O_j\cap\partial\Omega$ 上；

(4°) $\varphi_j$ 和 $\psi_j$ 的 Jacobi 行列式

$$\frac{D(\varphi_{j1},\cdots,\varphi_{jn})}{D(x_1,\cdots,x_n)} \quad 和 \quad \frac{D(\psi_{j1},\cdots,\psi_{jn})}{D(y_1,\cdots,y_n)}$$

都为正;

(5°) $\varphi_j$ 和 $\psi_j$ 互为反函数，且存在这样的常数 $k_1$，对任一 $n$ 重指标 $\alpha$，只要 $|\alpha|\leqslant k$，有

$$|\partial^\alpha\varphi_{ji}(x)|\leqslant k_1 \qquad \forall x\in O_j \quad i=1,2,\cdots,n; \quad j=1,2,\cdots,m$$

$$|\partial^\alpha\psi_{ji}(y)|\leqslant k_1 \qquad \forall y\in Q \quad i=1,2,\cdots,n; \quad j=1,2,\cdots,m$$

由定义显然 $C^k$ 型区域是 L 型区域，从而也是有界锥形区域.

称定义 3.4.1 中坐标变换系 $\{\varphi_j\}$，$\{\psi_j\}$ 为局部映射.

**定义 3.4.2** 设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域，对于给定的 $m$ 和 $p$，把 $\mathbf{H}^{m,p}(\Omega)$ 映入 $\mathbf{H}^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 的线性算子 $E$ 称为 $\Omega$ 的简单 $(m,\ p)$ 延拓算子，是指如果存在常数 $k=k(m,\ p)$ 使对所有的 $u\in\mathbf{H}^{m,p}(\Omega)$，满足

(1) 在$\Omega$上 $Eu(x)=u(x)$ $(a.e.)$;

(2) $\|Eu\|_{m,p,\mathbf{R}^n}\leqslant k\|u\|_{m,p,\Omega}$.

$E$ 称为 $\Omega$ 的强 $m$ 延拓算子，是指 (1) 如果 $E$ 把 $\Omega$ 上的几乎处处有定义的函数映入 $\mathbf{R}^n$ 上几乎处处有定义的函数的线性算子; (2) 如果对所有的 $p$，$1\leqslant p<\infty$，所有的 $k$，$0\leqslant k\leqslant m$，$E$ 在 $\mathbf{H}^{k,p}(\Omega)$ 上的限制是一个 $\Omega$ 的简单 $(k,\ p)$ 延拓算子.

可以证明(见 Adams[2])

**定理 3.4.7** 设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^n$ 内半空间，或者是 $\mathbf{R}^n$ 内的 $C^m$ 型区域，那么对任意的正数 $m$，存在 $\Omega$ 的强 $m$ 延拓算子 E.

在以后的讨论中，可以知道对于一个区域 $\Omega$，即使存在一个

简单$(m,\ p)$延拓算子，$H^{m,p}(\Omega)$可以继承到很多$H^{m,p}(R^n)$所具有的性质.

## §3.5 СОБОЛЕВ 空间嵌入定理

主要是由于 Соболев 空间的嵌入性质，才使得 Соболев 空间在分析中，特别是在微分算子和积分算子的研究中得到广泛的应用，空间$H^{m,p}(\Omega)$的最重要的连续嵌入性质通常概括在称为 Соболев 嵌入定理之中，而紧嵌入的性质则是包括在称为 Rellich−Кондрашев 嵌入定理之中.

本节中，分别对连续嵌入和紧嵌入进行讨论.方法是首先证明几种特殊情况下的嵌入定理，然后给出嵌入定理的全部内容.

嵌入定理的成立与函数空间的定义域有密切关系.本节对函数空间定义域的各种情况都有具体的说明.

**定义 3.5.1** 设 X、Y 是两个赋范空间，称 X 嵌入 Y，如果成立

(1) X 是 Y 的向量子空间;

(2) 对一切$x\in X$，由$Ix=x$定义的由 X 到 Y 中的恒等算子是连续的，即$\|Ix\|_Y\leqslant c\|x\|_X$,其中$c$与$x$无关.

如果把 I 称作嵌入算子，则嵌入算子就是泛函分析中一种特殊的线性算子.

**引理 3.5.1** 设$1\leqslant p<n$，且定义$1/p^*=1/p-1/n$则存在一个常数$c=c(n,p)$，使得

$$\|u\|_{0,p^*,R^n}\leqslant c\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_{R^n}\left|\partial_j u\right|^p dx\right\}^{1/p}\quad \forall u\in C_0^\infty(R^n)\qquad (3.5.1)$$

证 $\forall u\in C_0^\infty(R^n)$，有

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_j} |\partial_j u(x_1,\cdots,x_{j-1},t,x_{j+1},\cdots,x_n)|dt$$

$$|u(x)| \leq \int_{x_j}^{\infty} |\partial_j u(x_1,\cdots,x_{j-1},t,x_{j+1},\cdots,x_n)|dt$$

从而有

$$2|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_j u| dx_j$$

以及

$$2^n |u(x)|^n \leq \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_j u| dx_j \tag{3.5.2}$$

注意 Hoelder 不等式和 $1 \leq \alpha_k \leq +\infty$ ，满足 $\alpha_1^{-1} + \cdots + \alpha_r^{-1} = 1$，有

$$\int |u_1 \cdots u_r| d\mu \leq \prod_{k=1}^{r} \left( \int |u_k|^{\alpha_k} d\mu \right)^{1/\alpha_k} \tag{3.5.3}$$

将 (3.5.2) 的两边对 $x_n$ 积分，并用 Hoelder 不等式，(3.5.3) 以及取 $r = n-1$( 设 $n \geq 2$)，$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = n-1$，取

$$u_k = \left( \int |\partial_k u| dx_k \right)^{1/(n-1)}, \quad k = 1,\cdots,n-1.$$

则有

$$\int |2u(x)|^{n/(n-1)} dx_n$$

$$\leq \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} \int\int |\partial_j u| dx_j dx_n \right\}^{1/(n-1)} \left\{ \int |\partial_n u| dx_n \right\}^{1/(n-1)}$$

在对 $x_{n-1}$ 积分并用 Hoelder 不等式和 (3.5.3), 取 $r = n-1$ 和

$$u_k=\left\{\int|\partial_k u|dx_k dx_n\right\}^{1/(n-1)},\ k\leqslant n-1$$

$$u_n=\left\{\int|\partial_n u|dx_n\right\}^{1/(n-1)}$$

如此对$x_k(1\leqslant k\leqslant n-1)$积分，直到得出

$$\|u\|_{L^{n/(n-1)}}\leqslant\frac{1}{2}\left\{\prod_{j=1}^{n}\|\partial_j u\|_{L^1}\right\}^{1/n} \tag{3.5.4}$$

为止.

当 $p=1$ 时，由不等式

$$a_1\cdots a_n\leqslant\frac{1}{n!}(a_1+\cdots+a_n)^n,\ a_j\geqslant 0,\ (1\leqslant j\leqslant n) \tag{3.5.5}$$

立刻得到(3.5.1)式.

设 $p>1$ 时，注意到 $[(n-1)/n]p^*=[(n-1)/(n-p)]p>1$，对于 $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 有$|u|^{[(n-1)/n]p^*}\in C_0^1(\mathbf{R}^n)$. 同样，(3.5.4)对于 $u\in C_0^1(\mathbf{R}^n)$ 也成立 . 在 (3.5.4) 中用$|u|^{[(n-1)/n]p^*}$ 代替 $u$，并用不等式

$$\int|u|^{[(n-1)/n]p^*-1}|\partial_j u|dx$$

$$\leqslant\left\{\int|u|^{q\{[(n-1)/n]p^*-1\}}dx\right\}^{1/q}\|\partial_j u\|_{o,p,\mathbf{R}^n}$$

其中 $q=p/(p-1)$. 又 $q\{[(n-1)/n]p^*-1\}=p^*$ 以及$(n-1)/n-1/q=1/p^*$，立刻有

$$\|u\|_{o,p^*,\mathbf{R}^n}\leqslant\frac{p(n-1)}{2(n-p)}\left\{\prod_{j=1}^{n}\|\partial_j u\|_{o,p,\mathbf{R}^n}\right\}^{1/n}$$

再一次利用(3.5.5)，则可得到 p>1 时的(3.5.1). 证毕.

**推论 3.5.1** 设 $1 \leqslant p < n$，且 $1/p^* = 1/p - 1/n$，则存在一个常数 $c = c(n, p)$ 使得

$$\|u\|_{o,p^*,\mathbf{R}^n} \leqslant c|u|_{1,p,\mathbf{R}^n} \qquad \forall u \in \mathrm{H}^{1,p}(\mathrm{R}^n) \tag{3.5.6}$$

以下给出 Соболев 不等式(即引理 3.5.1)的另一种证明.

**辅助引理** 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$ 是一开集，$\Omega_i$ 表示 $\Omega$ 在超平面 $x_i = 0$ 上的投影，设 $W_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是给定的函数且 $W_i = W_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots x_n)$，即与 $x_i$ 无关，则

$$\int_\Omega |W_1 \cdots W_n| dx$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^n \left( \int_{\Omega_i} |W_i|^{n-1} dx_i \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \right)^{1/n-1}$$

**证** 用数学归纳法证明.$n=2$ 时结论显然成立.设 $n-1$ 时，结论成立，现对 $n$ 证明.记

$$y_i = \left( \int_{\Omega_i} |W_i|^{n-1} dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \right)^{1/n-1}$$

$$\Omega\left(x_n^o\right) = \Omega \cap \left\{ x : x_n = x_n^o \right\}$$

$$J(x_n) = \int_{\Omega(x_n)} \left| W_1 \cdots W_n \right| dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

考察 $J(x_n)$

$$J(x_n) \leqslant \left( \int_{\Omega(x_n)} \left| W_1 \cdots W_{n-1} \right|^{\frac{n-1}{n-2}} dx_1 \cdots dx_{n-1} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}$$

$$\cdot \left( \int_{\Omega(x_n)} \left| W_n \right|^{n-1} dx_1 \cdots dx_{n-1} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\leqslant \left( \int_{\Omega(x_n)} \left| W_1 \cdots W_{n-1} \right|^{\frac{n-1}{n-2}} dx_1 \cdots dx_{n-1} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} \cdot y_n$$

若记 $\varphi_i = \left| W_i \right|^{\frac{n-1}{n-2}}$，则上式右端第一个积分为

$$\int_{\Omega(x_n)} \left| W_1 \cdots W_{n-1} \right|^{\frac{n-1}{n-2}} dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

$$= \int_{\Omega(x_n)} \varphi_1 \cdots \varphi_{n-1} dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

则由归纳法的假设，当 $n-1$ 时有

$$\int_{\Omega(x_n)} |\varphi_1 \cdots \varphi_{n-1}| dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{n-1} \left( \int_{\Omega(x_n)i} |\varphi_i|^{n-2} dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \right)^{\frac{1}{n-2}}$$

其中 $\Omega(x_n)i$ 是 $\Omega(x_n)$ 在超平面 $x_i = 0$ 上的投影．因此

$$\int_{\Omega(x_n)} |W_1 \cdots W_{n-1}|^{\frac{n-1}{n-2}} dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{n-1} \left( \int_{\Omega(x_n)i} |W_i|^{(n-1)} dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \right)^{\frac{1}{n-2}}$$

得

$$J(x_n) \leqslant y_n \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left( \int_{\Omega(x_n)i} |W_i|^{(n-1)} dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{\Omega(x_n)}|W_i|^{(n-1)}dx_1\cdots dx_{i-1}dx_{i+1}\cdots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

证毕.

引理3.5.1证明　由 $\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$(\varphi(x))^{\frac{(n-1)p}{n-p}}=\int_{-\infty}^{x}\partial_i(\varphi(x))^{\frac{(n-1)p}{n-p}}dx_i$$

$$=\frac{(n-1)p}{n-p}\int_{-\infty}^{x}(\varphi(x))^{\frac{(n-1)p}{n-p}-1}\partial_i\varphi(x)dx_i$$

可得

$$|\varphi(x)|^{\frac{(n-1)p}{n-p}}\leqslant\frac{(n-1)p}{n-p}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^{\frac{(n-1)p}{n-p}-1}|\partial_i\varphi(x)|dx_i$$

记 $W_i(x)=W_i(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots x_n)=\sup_{x_i}|\varphi(x)|^{\frac{p}{n-p}}$,则有

$$W_i(x)^{(n-1)}\leqslant\frac{(n-1)p}{n-p}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^{\frac{n(p-1)}{n-p}}|\partial_i\varphi(x)|dx_i$$

因此，由 Hoelder 不等式，有

$$\int W_i(x)^{(n-1)}dx_1\cdots dx_{i-1}dx_{i+1}\cdots dx_n$$

$$\leqslant\frac{(n-1)p}{n-p}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|^{\frac{n(p-1)}{n-p}}|\partial_i\varphi(x)|dx$$

$$\leqslant\frac{(n-1)p}{n-p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|^{\frac{n(p-1)}{n-p}\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_i\varphi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{(n-1)p}{n-p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^{\frac{np}{n-p}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\partial_i \varphi\|_{o,p,\mathbb{R}^n}$$

又因

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{np}{n-p}} dx \leqslant \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x_i} |\varphi|^{\frac{p}{n-p}} dx = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |W_i| dx$$

故由辅助引理得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{np}{n-p}} dx \leqslant \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |W_i| dx$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |W_i|^{n-1} dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{n} \left\{\frac{(n-1)p}{n-p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^{\frac{np}{n-p}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\partial_j \varphi\|_{o,p,\mathbb{R}^n}\right\}^{\frac{1}{n-1}}$$

故 $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{np}{n-p}} dx\right)^{n-1}$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{n} \frac{(n-1)p}{n-p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^{\frac{np}{n-p}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\partial_j \varphi\|_{o,p,\mathbb{R}^n}$$

$$= \left(\frac{(n-1)p}{n-p}\right)^n \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^{\frac{np}{n-p}} dx\right)^{\frac{n(p-1)}{p}} \prod_{i=1}^{n} \|\partial_j \varphi\|_{o,p,\mathbb{R}^n}$$

从而

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^{\frac{np}{n-p}} dx\right)^{n-1-\frac{n(p-1)}{p}} \leqslant \left(\frac{(n-1)p}{n-p}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \|\partial_i \varphi\|_{o,p,\mathbb{R}^n}$$

根据不等式　$a_1 \cdots a_n \leqslant (a_1 + \cdots + a_n)^n \ / n!$，$a_j \geqslant 0$，$(1 \leqslant j$

$\leqslant n$)有

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n}|\varphi|^{\frac{np}{n-p}}dx\right)^{\frac{n-p}{p}}\leqslant\left(\frac{(n-1)p}{n-p}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}\left(\sum\|\partial_i\varphi\|_{o,p,\mathbf{R}^n}\right)^n$$

则

$$\|\varphi\|_{0,\frac{np}{n-p},\mathbf{R}^n}=\left(\int_{\mathbf{R}^n}|\varphi|^{\frac{np}{n-p}}dx\right)^{\frac{n-p}{np}}$$

$$\leqslant\left(\frac{(n-1)p}{n-p}\right)\frac{1}{(n!)^{1/n}}\sum_{i=1}^{n}\|\partial_i\varphi\|_{o,p,\mathbf{R}^n}$$

若记 $1/p^*=1/p-1/n$，$c(n,p)$
$=((n-1)p/(n-p))(n!)^{-1/n}$ 则有

$$\|\varphi\|_{o,p^*,\mathbf{R}^n}\leqslant c(n,p)\sum_{i=1}^{n}\|\partial_i\varphi\|_{o,p,\mathbf{R}^n}.$$

证毕.

**定理 3.5.1** 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是 $C^1$ 型区域以及 $1\leqslant p<n/m$($m$ 是正整数).$1/p'=1/p-m/n$，则 $\mathbf{H}^{1,p}(\Omega)\subset\mathbf{L}^{p'}(\Omega)$，而且存在常数 $c>0$ 使得 $\forall u\in\mathbf{H}^{m,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{o,p',\Omega}\leqslant c\|u\|_{m,p,\Omega}\tag{3.5.7}$$

**证** 首先考虑 $m=1$ 的情况．此时 $1/p'=1/p-m/n$，由推论 3.5.1 知 $\mathbf{H}^{1,p}(\mathbf{R}^n)\subset\mathbf{L}^{p^*}(\mathbf{R}^n)$ 存在一个常数 $c>0$，使得

$$\|v\|_{o,p^*,\mathbf{R}^n}\leqslant c\|v\|_{1,p,\mathbf{R}^n}\qquad\forall v\in\mathbf{H}^{1,p}(\mathbf{R}^n)\tag{3.5.8}$$

又 $\Omega$ 是 $C^1$ 型区域，由定理 3.4.7 知存在 $\Omega$ 的强 $m=1$ 延拓算子 $E$，满足

$$\|E\ u\|_{1,p,\mathbf{R}^n}\leqslant k\|u\|_{1,p,\Omega},\ \forall u\in\mathbf{H}^{1,p}(\Omega)$$

这里 $k=k(m,p)$ 是 $\Omega$ 的强 $m$ 延拓算子定义 3.4.2 中的常数．

又 $\|u\|_{o,p^*,\Omega} \leqslant \|Eu\|_{o,p^*,R^n}$，故 $m=1$ 时，有

$$\|u\|_{o,p^*,\Omega} \leqslant c_1 \|u\|_{1,p,\Omega}$$

注意到此时 $p^*$ 与 $p'$ 相同，都是$\frac{np}{n-p}$，故 (3.5.7) 成立．

设 $m$ 是大于 1 任意整数 .$u \in H^{m,p}(\Omega)$ 等价于 $\partial^\alpha u \in H^{1,p}(\Omega)$，$\forall \alpha \in Z^n_+$，$|\alpha| \leqslant m-1$. 因此，对 $\partial^\alpha u$，$|\alpha| \leqslant m-1$，应用 $m=1$ 时的 (3.5.7)，有

$$\|u\|_{m-1,p^*,\Omega} \leqslant c_2 \|u\|_{m,p,\Omega} \qquad \forall u \in H^{m,p}(\Omega)$$

这里 $\quad 1/p^* = 1/p - 1/n.$

然后继续用 $\|\cdot\|_{m-1,p^*,\Omega}$ 范数估计 $\|\cdot\|_{m-2,\tilde{p},\Omega}$ 范数，其中

$$1/\tilde{p} = 1/p^* - 1/n$$

如此迭代 $m$ 次，以 $p$ 相应地作用 $m$ 次 $p \to p^*$ 的运算，有

$$\|u\|_{o,p',\Omega} \leqslant c_o \|u\|_{m,p,\Omega}$$

其中 $\quad 1/p' = 1/p - m/n.$ 证毕.

**定理3.5.2** 设$\Omega \subset R^n$是有界锥形区域，并且

$$n/m < p \leqslant +\infty \quad, m \geqslant 1 \tag{3.5.9}$$

则 $H^{m,p}(\Omega) \subset C^o_B(\Omega)$ 以及存在一个常数 $c>0$，使得

$$\sup_{y \in \Omega} |u(y)| \leqslant c \|u\|_{m,p,\Omega} \qquad \forall u \in H^{m,p}(\Omega) \tag{3.5.10}$$

证 由于 $\Omega$ 是有界锥形区域，其内每一点都是一个与过原点的有限锥 $C_0$ 全同的有界锥的顶点，不妨设 $C_0$ 的高为 $\zeta$，体积为 $\gamma\zeta^n$.这里 $\gamma$ 是锥的角的度量.如果把半径为 $\zeta$ 的球的体积记为 $\omega_n\zeta^n/n$，这里 $\omega_n$ 是 $R^n$ 中单位球的体积.从而锥 $C_0$ 的角是这两个体积之比，即 $\gamma n/\omega_n$.

引入截断函数 $g \in C^\infty_0(R)$，它满足 $g \geqslant 0$；当$|t| \leqslant 1/2$ 时，

$g(t)=1$；当$|t|\geqslant 1$时，$g(t)=0$.

令$\tau(t)=g(t/\zeta)$，并存在常数$A_k>0$，使得

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}\tau(t)\right|\leqslant\frac{A_k}{\zeta^k},\ \zeta>0 \tag{3.5.11}$$

对于任意$u\in C^{\infty}(\Omega)\bigcap H^{m,p}(\Omega)$. 任取$y\in\Omega$，记该点处的有限锥为$C_y$，在由顶点$y$引出的任意给定的射线上对$x\in C_y$进行积分，有

$$\int_0^{\zeta}\partial_y(\tau(r)u(x))dr=-u(y) \tag{3.5.12}$$

这里$r=|x-y|$. 我们取以$y$为原点的球坐标$(r,\ \omega)$，它与$\mathbf{R}^n$中直角坐标$(x)$的关系如下

$$\begin{cases} x_1=r\cos\omega_1 \\ x_2=r\sin\omega_1\cos\omega_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ x_{n-1}=r\sin\omega_1\cdots\sin\omega_{n-2}\cos\omega_{n-1} \\ x_n=r\sin\omega_1\cdots\sin\omega_{n-2}\sin\omega_{n-1} \end{cases} \tag{3.5.13}$$

坐标变换的 Jacobi 行列式为

$$J=\frac{D(x_1,\cdots x_n)}{D(r,\omega_1,\cdots,\omega_{n-1})}=r^{n-1}\varphi(\omega)$$

其中$\varphi(\omega)=\varphi(\omega_1,\cdots,\omega_{n-1})=\sin^{n-2}\omega_1\sin^{n-3}\omega_2\cdots\sin\omega_{n-2}$. 球坐标中体积微元为$r^{n-1}\varphi(\omega)drd\omega$，为了方便记$d\omega=d\omega_1\cdots d\omega_{n-1}$，$d\overline{\omega}=\varphi(\omega)d\omega$.

将(3.5.12)在锥$C_y$上积分，得

$$\int_\theta\int_0^\zeta \partial_r(\tau(r)u(x))\,dr\,d\overline{\omega} = -u(y)\int_\theta d\overline{\omega}$$

$$= -u(y)\gamma n/\omega_n$$

其中 $\theta=\gamma n/\omega_n$ 是锥 $C_y$ 的角.对它分部积分 $m-1$ 次，得

$$u(y)=\frac{(-1)^m\omega_n}{\gamma n(m-1)!}\int_\theta\int_0^\zeta \partial_r^m(\tau u)r^{m-1}\,dr\,d\overline{\omega}$$

变换到直角系中，注意到 $dx=r^{n-1}dr\,d\overline{\omega}$，则有

$$|u(y)|\leqslant\frac{\omega_n}{\gamma n(m-1)!}\int_{C_y}|\partial_r^m(\tau u)|r^{m-n}\,dx \tag{3.5.14}$$

对于 $p>1$，由 Hoelder 不等式，得

$$|u(y)|\leqslant\frac{\omega_n}{\gamma n(m-1)!}I_1\cdot I_2$$

这里　$1/p+1/q=1$ 以及

$$I_1=\left(\int_{C_y}|\partial_r^m(\tau u)|^p\,dx\right)^{1/p},\quad I_2=\left(\int_{C_y}r^{(m-n)\cdot q}\,dx\right)^{1/q}$$

现在考察积分 $I_2$，由(3.5.9)，知 $q(m-n)+n-1>-1$，故

$$I_2=\int_{C_y}r^{(m-n)q}\,dx=\int_\theta\int_0^\zeta r^{(m-n)q+(n-1)}\,dr\,d\overline{\omega}$$

$$=\frac{\gamma n\zeta^{mp-n}}{\omega_n(mp-n)}$$

对于 $p=1$，由(3.5.9)知 $m>n$，故有

$$\int_{C_y}|\partial_r^m(\tau u)|r^{m-n}\,dx\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in C_y}|r^{m-n}|\int_{C_y}|\partial_r^m(\tau u)|\,dx$$

$$=\|r^{m-n}\|_{0,\infty,C_y}\cdot\|\partial_r^m(\tau u)\|_{0,1,C_y}$$

综上所述，对 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，有

$$|u(y)| \leqslant \frac{\omega_n}{\gamma n(m-1)!}\|r^{m-n}\|_{0,q,C_y}\|\partial_r^m(\tau u)\|_{0,p,C_y}$$
$$\leqslant c(m,n,\zeta,p)\|\partial_r^m(\tau u)\|_{0,p,C_y} \tag{3.5.15}$$

这里 $c(m,n,p,\zeta)$是一个只与 $m$，$n$，$p$，$\zeta$ 有关的常数.由 Leibniz 公式及(3.5.11)有

$$\left|\partial_r^m(\tau u)\right| = \left|\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\partial_r^{m-k}\tau \cdot \partial_r^k u\right| \leqslant \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{A_{m-k}}{\zeta^{m-k}}\left|\partial_r^k u\right|$$

以及由链导法有

$$\left|\partial_r^k u\right| \leqslant c' \sum_{|\alpha| \leqslant k}\left|\partial^\alpha u(x)\right|$$

注意到 $C_y \subset \Omega$，故有

$$\sup_{y\in\Omega}|u(y)| \leqslant c\|u\|_{m,p,\Omega}$$

这里 $c = c(m,n,p,\zeta)c'$.又由定理 3.2.6，即 $C^\infty(\Omega)$在 $H^{m,p}(\Omega)$中稠密，得(3.5.10)式成立．证毕.

引理 3.5.1 以及定理 3.5.1 常被称为 Соболев 不等式．而对于 (3.5.10)，应作如下理解：即$\forall u \in H^{m,p}(\Omega)$，由定理 3.2.6 知 $C^\infty(\Omega)$ 中有一个序列$\{\varphi_n\}$ 在 $H^{m,p}(\Omega)$的范数下收敛到 $u$．因为$\{\varphi_n\}$ 是 $H^{m,p}(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列，(3.5.10) 意味着$\{\varphi_n\}$ 收敛到 $\Omega$ 上的一个连续函数，因此 $u$ 一定与 $C^0(\bar{\Omega}) \cap L^\infty(\bar{\Omega})$ 中的一个函数几乎处处相等，且满足关系 (3.5.10).

前面，我们曾给出嵌入的定义，则 (3.5.6) 可写为 $H^{1,p}(R^n)$ 嵌入 $L^{p^*}(R^n)$. 当 $1 \leqslant p < \infty$，$1/p^* = 1/p - 1/n$ 时．相应地 (3.5.10) 可写为 $H^{m,p}(\Omega)$ 嵌入 $C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$，当$\frac{n}{m}$

$\leqslant p < +\infty$，$m \geqslant 1$ 时．

研究定义在区域 $\Omega$ 上的导算子的边值问题时，重要的问题是决定定义在 $\Omega$ 的边界上的函数空间，包括决定 $H^{m,p}(\Omega)$ 中的函数 $u$ 的迹 $u|_{\partial\Omega}$，例如，如果 $H^{m,p}(\Omega)$ 嵌入 $C^{\circ}(\Omega)\bigcap L^{\infty}(\Omega)$，则 $u|_{\partial\Omega}\in C^{\circ}(\partial\Omega)$.

考察上半空间情况，即 $\Omega = R^n_+ = \{x = (x', x_n): x' \in R^{n-1}, x_n > 0\}$，其中 $x' = (x_1,\cdots,x_{n-1})$. $\forall \varphi \in C^{\infty}_0(R^n,\Omega)$，$x' \in R^{n-1}$，有

$$(\varphi(x',0))^p = -\int_0^{\infty} \partial_t((\varphi(x',t))^p)dt$$

在 $R^{n-1}$ 上积分上述等式，对于 $p>1$ 时，有

$$\|\varphi(x',0)\|^p_{o,p,R^{n-1}} \leqslant p\int_{R^{n-1}}\int_0^{\infty} |\varphi(x',t)|^{p-1}|\partial_t\varphi(x',t)|dt\ dx'$$

$$\leqslant p\left\{\int_{R^n_+} |\varphi(x',t)|^{(p-1)q} dx\right\}^{1/q} \cdot \left\{\int_{R^n_+} |\partial_t\varphi(x',t)|^p dx\right\}^{1/p}$$

$$\leqslant p\left\{\frac{\|\varphi(x',t)\|^p_{o,p,R^n_+}}{q} + \frac{\|\partial_t\varphi(x',t)\|^p_{o,p,R^n_+}}{p}\right\}$$

$$\leqslant c\|\varphi(x',t)\|^p_{1,p,R^n_+}$$

这里 $1/p + 1/q = 1$，在上面推导中应用了 Hoelder 不等式，和不等式 $a \cdot b \leqslant a^p/p + b^q/q$. 又当 $p = 1$ 时，上述不等式显然成立．故当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时，$\forall \varphi \in C^{\infty}_0(R^n,\Omega)$ 有

$$\|\varphi(x',0)\|^p_{o,p,R^{n-1}} \leqslant c\|\varphi(x',t)\|^p_{1,p,R^n_+} \tag{3.5.16}$$

又由 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n,\Omega)$ 在 $H^{1,p}(\Omega)$ 中的稠密性，故 (3.5.16) 对 $u \in H^{1,p}(\Omega)$ 也成立．

**定理 3.5.3** 由 $\bar{\gamma}_0(\varphi)(x')=\varphi(x',0)$，$\varphi\in C_0^1(\mathbf{R}^n,\Omega)$ $x'\in\partial\Omega$，所定义的迹算子 $\bar{\gamma}_0$：$C_0^1(\mathbf{R}^n,\Omega)\to C^0(\partial\Omega)$ （这里 $\Omega=\mathbf{R}_+^n$）可以唯一地延拓为连续线性算子 $\gamma_0\in L(H^{1,p}(\Omega),\ L^p(\partial\Omega))$，其值域在 $L^p(\partial\Omega)$ 中稠密，而且满足

$$\gamma_0(\beta u)=\gamma_0(\beta)\gamma_0(u)\quad \forall\beta\in C_0^1(\Omega),\ u\in H^{1,p}(\Omega)$$

**证** 由(3.5.16)及 Hahn–Banach 定理容易得出 $\gamma_0\in L(H^{1,p}(\Omega),\ L^p(\partial\Omega))$ 又 $\forall\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$，引入截断函数 $\tau\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ 如下，当 $|x|\leqslant 1$ 时，$\tau(x)=1$；当 $|x|\geqslant 2$ 时，$\tau(x)=0$ 以及 $0\leqslant\tau(x)\leqslant 1\quad\forall x\in\mathbf{R}$，则定义 $\varphi(x)=\psi(x')\tau(x_n)$，$x=(x',x_n)\in\mathbf{R}_+^n$ 此时 $\varphi\in C_0^1(\mathbf{R}^n,\Omega)$ 以及 $\gamma_0(\varphi)=\psi$. 从而 $\gamma_0$ 的值域包含 $C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$.

由 $\gamma_0$ 的连续性及对于 $u\in C_0^1(\Omega)$ 定理成立，而 $C_0^1(\mathbf{R}^n,\Omega)$ 在 $H^{1,p}(\Omega)$ 中稠密，故定理对 $u\in H^{1,p}(\Omega)$ 同样成立． 证毕．

对于 $\|u\|_{0,p,\mathbf{R}^{n-1}}\leqslant c\|u\|_{1,p,\mathbf{R}_+^n}$，$\forall u\in H^{1,p}\left(\mathbf{R}_+^n\right)$，应作如下理解，每个元素 $u\in H^{1,p}\left(\mathbf{R}_+^n\right)$ 是 $C^\infty\left(\mathbf{R}_+^n\right)$ 中一个函数序列 $\{\varphi_n\}$ 在 $H^{1,p}\left(\mathbf{R}_+^n\right)$ 中的极限，函数 $\varphi_n$ 在 $\mathbf{R}^{n-1}$ 上具有属于 $C^\infty\left(\mathbf{R}^{n-1}\right)$ 的迹，而这些迹在 $L^p\left(\mathbf{R}^{n-1}\right)$ 中收敛到一个函数 $\varphi$，它满足 $\|\varphi\|_{0,p,\mathbf{R}^{n-1}}\leqslant c\|u\|_{1,p,\mathbf{R}_+^n}$，其中 $c$ 与 $u$ 无关．

注意到前面给出的几个嵌入的例子，则有必要对定义 3.5.1

的某些含义作些推广.1) I 是恒等算子的要求可以减弱为允许把 X 的某些典型的线性变换嵌入到 Y 中，如有 $H^{1,p}\left(R^n_+\right)$ 嵌入 $L^p\left(R^{n-1}\right)$；2) 不一定要求 X 是 Y 的向量子空间，只要求二者之间有一定的关系.

从前面所给出的几个嵌入例子的证明，人们可能已经发现，它们的证明过程所运用的技巧是十分初等的，把比简单微积分稍多一点的知识和灵活地应用 Hoelder 不等式结合起来就是这种技巧的基础.基于篇幅的限制,这里仅给出 Соболев 嵌入定理而不予以证明，必要时请参阅 Adams[2] 第五章.

**定理 3.5.4 (Соболев 嵌入定理)** 设 $\Omega$ 是 $R^n$ 中的一个区域，$\Omega^k$ 是 $\Omega$ 和 $R^n$ 中的一个 $k$ 维平面相交得到的 $k$ 维区域，$1\leqslant k\leqslant n$.(因此有 $\Omega^n\equiv\Omega$).又设 $j$ 和 $m$ 是非负整数，$p$ 满足 $1\leqslant p<\infty$.

(1) 如果 $\Omega$ 具有锥性质，则存在下列嵌入:

(A) 假定 $mp<n$，而且 $n-mp<k<n$，则

$$H^{j+m,p}(\Omega)\text{嵌入}H^{j,q}(\Omega^k)\quad p\leqslant q\leqslant kp/(n-mp)\tag{3.5.17}$$

特别有

$$H^{j+m,p}(\Omega)\text{嵌入}H^{j,q}(\Omega)\quad p\leqslant q\leqslant np/(n-mp)\tag{3.5.18}$$

或有

$$H^{m,p}(\Omega)\text{嵌入}L^q(\Omega)\quad p\leqslant q\leqslant np/(n-mp)\tag{3.5.19}$$

而且，如果 $p=1$，对于 $k=n-m>0$，嵌入(3.5.17)也存在.

(B) 假定 $mp=n$，则对于每个 $k$，$1\leqslant k\leqslant n$，

$$H^{j+m,p}(\Omega)\text{嵌入}H^{j,q}(\Omega^k),\quad p\leqslant q<\infty\tag{3.5.20}$$

特别有

$$H^{m,p}(\Omega)\text{嵌入}L^q(\Omega)\quad p\leqslant q<\infty\tag{3.5.21}$$

而且，若 $p=1$，则对于 $q=\infty$，嵌入 (3.5.20)、(3.5.21) 同样成立.尤其有

$$H^{j+n,1}(\Omega)\text{嵌入}C^j_B(\Omega)\tag{3.5.22}$$

这里 $C_B^j(\Omega)=\{u\in C^j(\Omega):\ \partial^\alpha u$在$\Omega$上有界，$|\alpha|\leqslant j\}$，其范数定义为

$$\|u\|_{C_B^j(\Omega)}=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant j}\sup_{x\in\Omega}|\partial^\alpha u(x)|$$

$C_B^j(\Omega)$是Banach空间.

(C) 假定 $mp>n$，则

$$H^{j+m,p}(\Omega)嵌入C_B^j(\Omega) \tag{3.5.23}$$

(2) 如果 $\Omega$ 是 L 型区域，则能够把第(1)部分情况(C)改进如下：

(C′) 假定 $mp>n>(m-1)p$，则

$$H^{j+m,p}(\Omega)嵌入C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}),\quad 0<\lambda\leqslant m-\frac{n}{p} \tag{3.5.24}$$

(C″) 假定 $n=(m-1)p$，则

$$H^{j+m,p}(\Omega)嵌入C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}),\quad 0<\lambda<1 \tag{3.5.25}$$

进一步还有，如果 $n=(m-1)p$ 和 $p=1$，则对 $0<\lambda\leqslant 1$，嵌入(3.5.25)同样成立.

这里 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})(0<\lambda\leqslant 1)$ 定义如下：$\forall\varphi\in C^m(\Omega)$，满足

(1) $\forall\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant m$，$\partial^\alpha\varphi$ 在 $\Omega$ 上有界且一致连续，

(2) $\forall\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant m$，$\partial^\alpha\varphi$ 在 $\Omega$ 上满足指数为 $\lambda$ 的 Hoelder 条件，即存在常数 $c$ 使得

$$|\partial^\alpha\varphi(x)-\partial^\alpha\varphi(y)|\leqslant c|x-y|^\lambda\quad\forall x,y\in\Omega$$

其范数定义为

$$\|\varphi\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})}=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in\Omega}|\partial^\alpha\varphi(x)|+\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}}\frac{|\partial^\alpha\varphi(x)-\partial^\alpha\varphi(y)|}{|x-y|^\lambda} \tag{3.5.26}$$

$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$在其范数下是Banach空间.

(3) 假如把接受的 $H^{m,p}$ 空间都替换成相应的 $H_0^{m,p}$ 空间，则第(1)和第(2)部分的结论对任意区域都成立.

在 Соболев 嵌入定理中，(3)是(1)和(2)应用到 $R^n$ 上去的直接推论，因为将函数在 Ω 外延拓为零的算子可将 $H_0^{m,p}(\Omega)$等距地映射到 $H^{m,p}(R^n)$中.

另一方面，假定对于 $\Omega=R^n$ 嵌入定理的所有结论都已得到证明，则对于某些特殊的 Ω，这些嵌入定理也成立.例如 $H^{m,p}(R^n)$嵌入 $L^q(R^n)$，而且 E 是 Ω 的一个$(m, p)$延拓算子，则对于任何 $u\in H^{m,p}(\Omega)$，有

$$\|u\|_{o,q,\Omega} \leqslant \|Eu\|_{o,q,R^n} \leqslant c_1\|Eu\|_{m,p,R^n} \leqslant c_1c_2\|u\|_{m,p,\Omega}$$

其中$c_1$和$c_2$与$u$无关.

Соболев 嵌入定理中包含低维平面上函数迹的嵌入关系(3.5.17)、(3.5.20)的嵌入能够用一种合理的方式推广到使它能应用到更一般的光滑流形的迹上去.见下面定理.

**定理 3.5.5** 设 Ω 是 $R^n$ 中 $C^m$ 型区域.如果 $mp<n$ 而 $p\leqslant q\leqslant(n-1)p/(n-mp)$，则

$$H^{m,p}(\Omega)嵌入L^q(\partial\Omega) \tag{3.5.27}$$

如果 $mp=n$，则对 $p\leqslant q<\infty$，(3.5.27)式也成立.

**证** 因为 Ω 是 $R^n$ 中 $C^m$ 型区域，根据定理 3.4.7，对于 $m$，存在 Ω 的强 $m$ 延拓算子，也是 Ω 的简单$(m, p)$延拓算子 E，使得

$$\|Eu\|_{m,p,R^n} \leqslant k\|u\|_{m,p,\Omega} \tag{3.5.28}$$

又因 Ω 是 $R^n$ 中 $C^m$ 型区域，由定义 3.4.1 中知，存在 ∂Ω 的一个局部有限开覆盖$\{O_j\}$和相应的 $m$ 阶光滑变换$\{\psi_j\}$把 $Q=\left\{y=(y',y_n)\in R^n: |y'|<1, -1<y_n<1\right\}$ 映到 $\{O_j\}$ ( $j$

$=1, 2, \cdots m$) 上，使得 $O_j \cap \partial\Omega = \psi_j(Q_0)$；$Q_0 = \{y \in Q$：$y_n = 0\}$.如果supp $f \subset O_j$，则可以通过

$$\int_{\partial\Omega} f(x)ds = \int_{O_j \cap \partial\Omega} f(x)ds = \int_{Q_0} f \cdot \psi_j(y', 0) J_j(y')dy' \tag{3.5.29}$$

来定义 $f$ 在 $\partial\Omega$ 上的积分，其中 $y' = (y_1, \cdots, y_{n-1})$，而且如果 $x = \psi_j(y)$，则

$$J_j(y') = \left| \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{D(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots x_n)}{D(y_1, \cdots y_{n-1})} \right)^2 \right\}^{1/2} \right|_{y_n=0} \tag{3.5.30}$$

如果 $f$ 是在 $\partial\Omega$ 上定义的任意函数．根据定理1.8.6(单位分解定理)，知可存在 $\partial\Omega$ 的从属于 $\{O_j\}_{j=0}^{m}$ 的一个 $C^{\infty}$ 单位分解 $\{v_j\}$，$0 \leqslant v_j \leqslant 1$. 令

$$\int_{\partial\Omega} f(x)ds = \sum_j \int_{\partial\Omega} f(x) v_j(x) ds$$

则对 $f(x)v_j$ 可以应用(3.5.29)表示其在 $Q_0$ 上积分

现在证明 $mp < n$ 和 $q = (n-1)p/(n-mp)$ 时本定理的结论，其它情况可用类似的方法证明．

因为 $\Omega$ 是 $C^m$ 型区域．故由定义知存在常数 $c_1$，使得对每个 $j$ 和一切 $y \in Q$，$x = \psi_j(y) \in O_j$，有

$$0 < \frac{|D(x_{j1}, \cdots x_{jn})|}{|D(y_1, \cdots y_n)|} \leqslant c_1 \quad 和 \quad 0 < \frac{|D(y_{j1}, \cdots y_{jn})|}{|D(x_1, \cdots x_n)|} \leqslant c_1 \tag{3.5.31}$$

根据 $\{v_j\}$ 的性质，则 $\forall u \in H^{m,p}(\Omega)$，有

$$\int_{\partial\Omega} |Eu(x)|^q ds \leqslant \sum_{j=1}^{m} \int_{O_j \cap \partial\Omega} |Eu(x)|^q ds$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega_0} |Eu\cdot\psi_j(y',0)|^q J_j(y')dy'$$

$$\leqslant c_1\sum_{j=1}^{m}\|Eu\cdot\psi_j\|^q_{m,p,\Omega_0}\leqslant c_2\sum_{j=1}^{m}\left(\|Eu\cdot\psi_j\|^p_{m,p,\Omega}\right)^{q/p}$$

$$\leqslant c_3\left(\sum_{j=1}^{m}\|Eu\|^p_{m,p,O_j}\right)^{q/p}\leqslant c_3\|Eu\|^q_{m,p,R^n}\leqslant c_4\|u\|^q_{m,p,\Omega}$$

在上面推导中，利用了(3.5.17)，(3.5.28)，(3.5.31)及 $0\leqslant\psi_j\leqslant 1$，$|a|^p+|b|^p\leqslant(|a|+|b|)^p$，$1\leqslant p<\infty$；以及有限覆盖的有限交性质.证毕.

如同 Соболев 嵌入定理所述叙的那样，Соболев 空间之间不仅有着连续嵌入的关系，而且在某些条件下，还有紧嵌入的关系、如 I 算子是紧算子.这点将在下面的 Rellich–Кодрашев 定理中加以描述.紧嵌入在分析中有很多重要的应用，尤其是证明在有界区域上线性椭圆型偏微分算子谱的离散性.

设 $X$ 是线性赋范空间 .$X$ 中的子集 $M$ 称为有界集合，如果存在常数 $c$，满足 $\sup\limits_{x\in M}\|x\|_X\leqslant c$.

X 中的子集 M 称为紧的，如果 M 中的每个点列包含一个子序列，该子序列在 X 中收敛到 M 中的一个元素.

X 中的子集 M 称为准紧(相对紧)的，如果其闭包$\overline{M}$(在 $X$ 的范数拓扑下)是紧的.

**定义 3.5.2** 设 X，Y 是赋范空间，而 A 是从 X 到 Y 中的一个算子.算子 A 称为紧的，如果当 M 在 X 中有界时，A(M)在 Y 中是准紧的.如果 A 是连续而且紧的算子，则称 A 是全连续算子.

每个紧算子是有界算子.每个有界线性算子是连续算子.因此每个紧线性算子是全连续的.

**定义 3.5.3** 如果 X 到 Y 之间存在紧算子 A，则称 X 紧嵌

、Y.

我们将给出几个紧嵌入的例子.为了以后的需要，这里再重述熟知的 Ascoli–Arzela 定理(参见定理 1.2.2).

**定理 3.5.6** 设 $\Omega$ 是 $R^n$ 中的有界区域，M 是 $C(\overline{\Omega})$ 中的子集合，如果有

(1) 存在一个常数 c，对一切 $\varphi\in M$ 和 $x\in\Omega$，有 $|\varphi(x)|<c$;

(2) 对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\varphi\in M$，$x$、$y\in\Omega$ 而且 $|x-y|<\delta$ 时，有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|<\varepsilon$.

则 M 在 $C(\overline{\Omega})$ 中是准紧的，即从 M 中可选出一个函数序列 $\{\varphi_n\}$ 在 $C(\overline{\Omega})$ 中收敛于 $\varphi$.

**定理 3.5.7** 设 $\Omega$ 是 $R^n$ 的有界开集，$0<\mu\leqslant 1$，则

$$C^{0,\mu}(\overline{\Omega})\text{紧嵌入}C(\overline{\Omega}) \tag{3.5.32}$$

**证** 由 (3.5.26)，取 $m=0$，有 $\forall\varphi\in C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$

$$\|\varphi\|_{C^{0,\mu}(\overline{\Omega})}=\sup_{x\in\Omega}|\varphi(x)|+\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{\mu}}$$

$$\geqslant\sup_{x\in\Omega}|\varphi(x)|=\|\varphi\|_{C(\overline{\Omega})}$$

故 $C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ 嵌入 $C(\overline{\Omega})$.

设 M 是 $C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ 中的任一有界集合，由以上不等式知 M 也是 $C(\overline{\Omega})$ 中的有界集合，而且 $\forall\varphi\in M$，$x$、$y\in\Omega$ 有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant c|x-y|^{\mu}$，这里 $c$ 只依赖于 M，与 $\varphi$ 无关.故由定理 3.5.6 知，M 在 $C(\overline{\Omega})$ 中是准紧的，即在 M 中可以选出子序列 $\{\varphi_n\}$ 在 $C(\overline{\Omega})$ 中收敛，故 (3.5.32) 成立．证毕．

**定理 3.5.8** 设 $\Omega$ 是 $R^n$ 中的有界开集，则

$$C^{0,\mu}(\overline{\Omega})\text{紧嵌入}C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})\ (0<\lambda<\mu\leqslant 1) \tag{3.5.33}$$

**证** 因为 $\forall\varphi\in C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\0<|x-y|<1}}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{\lambda}}\leqslant\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\0<|x-y|<1}}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{\mu}}$$

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\|x-y|\geqslant 1}}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{\lambda}}\leqslant 2\sup_{x\in\Omega}|\varphi(x)|$$

从而 $\|\varphi\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})}\leqslant 3\|\varphi\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})}$. 即

$$C^{0,\mu}(\bar{\Omega})\text{嵌入}C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$$

设 M 是 $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ 中的任一有界集. 由定理 3.5.7 知存在函数子序列 $\{\varphi_n\}\subset M$ 在 $C(\bar{\Omega})$ 中收敛. 如能证明 $\{\varphi_n\}$ 在 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 中也收敛，则有 (3.5.33). 事实上，若记 $g_{mn}(x)=\varphi_m(x)-\varphi_n(x)$，由 $0<\lambda/\mu<1$，有

$$\begin{aligned}\frac{|g_{mn}(x)-g_{mn}(y)|}{|x-y|^{\lambda}}&=\left|\frac{[\varphi_m(x)-\varphi_n(x)]-[\varphi_m(y)-\varphi_n(y)]}{|x-y|^{\mu}}\right|^{\frac{\lambda}{\mu}}\\&\quad\times|g_{mn}(x)-g_{mn}(y)|^{1-\frac{\lambda}{\mu}}\\&=\left|\frac{[\varphi_m(x)-\varphi_m(y)]-[\varphi_n(x)-\varphi_n(y)]}{|x-y|^{\mu}}\right|^{\frac{\lambda}{\mu}}\\&\quad\times|g_{mn}(x)-g_{mn}(y)|^{1-\frac{\lambda}{\mu}}\end{aligned}$$

M 是 $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ 中的有界集，故上式右端第一个因子不超过常数 $c$，故

$$\frac{|g_{mn}(x)-g_{mn}(y)|}{|x-y|^{\lambda}}\leqslant c|g_{mn}(x)-g_{mn}(y)|^{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

从而

$$\|g_{mn}(x)\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})}=\sup_{x\in\Omega}|g_{mn}(x)|+\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\0<|x-y|}}\frac{|g_{mn}(x)-g_{mn}(y)|}{|x-y|^{\lambda}}$$

$$\leqslant \|g_{mn}(x)\|_{C(\bar{\Omega})} + 2c\|g_{mn}(x)\|^{\delta}_{C(\bar{\Omega})}(\delta = 1 - \lambda/\mu)$$

这个不等式说明，由 $\{\varphi_n\}$ 是 $C(\bar{\Omega})$ 中的 Canchy 序列可得 $\{\varphi_n\}$ 也是 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 中的 Cauchy 序列，又 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 是 Banach 空间，故 $\{\varphi_n\}$ 在 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ 中收敛． 证毕．

**设 X，Y，Z 是线性赋范空间，嵌入算子 $A$ 和 $B$ 分别把 X，Y 映到 Y，Z，则嵌入算子 $B \cdot A$ 把 X 映到 Z.**

设 X 嵌入 Y 则有，(1) 如果 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛，则 $\{Ax_n\}$ 在 Y 中收敛；(2) 如果 $\{x_n\}$ 在 X 中有界，则 $\{Ax_n\}$ 在 Y 中有界．由此容易证明，如果 X 嵌入 Y，Y 嵌入 Z，并且至少有一个是紧嵌入，则 X 紧嵌入 Z.

**定理 3.5.9** 设 $\Omega$ 是 L 型区域，则

(1) 如果 $mp>n$，那么

$$H^{m,p}(\Omega)\text{紧嵌入}C(\bar{\Omega}) \tag{3.5.34}$$

(2) 如果 $mp>n\geqslant(m-1)p$，且 $0<\lambda<m-(n/p)$，那么

$$H^{m,p}(\Omega)\text{紧嵌入}C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}) \tag{3.5.35}$$

证 (1) 如果 $mp>n$，设 $j^*$ 是满足条件 $(m-j^*)p>n\geqslant(m-j^*-1)p$ 的非负整数，即 $m-\frac{n}{p}-1\leqslant j^*<m-\frac{n}{p}$. 则由 Cоболев 嵌入定理中 (3.5.24) 有

$$H^{m,p}(\Omega)\text{嵌入}H^{m-j^*,p}(\Omega)\text{嵌入}C^{0,\mu}(\bar{\Omega})\text{嵌入}C(\bar{\Omega})$$

其中 $0<\mu<m-j^*-(n/p)$. 由定理 3.5.7，知上述嵌入串中最后一个是紧嵌入，故有 (3.5.34) 成立．

(2) 如果 $mp>n\geqslant(m-1)p$，并且 $0<\lambda<m-(n/p)$，则存在一个 $\mu$，满足 $\lambda<\mu<m-(n/p)$. 因为 $\Omega$ 是 L 型区域，故由定理 3.5.8 有 $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ 紧嵌入 $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$. 再由 Cоболев 嵌入定理

中 (3.5.24) 有 $H^{m,p}(\Omega)$ 嵌入 $C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$. 故 (3.5.35) 成立． 证毕．

**定理 3.5.11** 设 $\Omega$ 是 $R^n$ 中的一个区域，$\Omega^k$ 是 $R^n$ 中 $k$ 维超平面与 $\Omega$ 的交 $(1\leqslant k\leqslant n)$，若对于 $1\leqslant q_1<q_0$ 有

$$H^{m,p}(\Omega)\text{嵌入}L^{q_0}(\Omega^k) \tag{3.5.36}$$

$$H^{m,p}(\Omega)\text{紧嵌入}L^{q_1}(\Omega^k) \tag{3.5.37}$$

则对任意 $q\in[q_1,q_0)$，有

$$H^{m,p}(\Omega)\text{紧嵌入}L^{q}(\Omega^k) \tag{3.5.38}$$

证 $q=q_1$ 时，由 (3.5.37) 知 (3.5.38) 成立．故只讨论 $q_1<q<q_0$ 的情况．令 $\lambda=q_1(q_0-q)/q(q_0-q_1)$，$\mu=q_0(q-q_1)/q(q_0-q_1)$. 注意 $\lambda+\mu=1$，$\lambda>0$，$\mu\geqslant 0$. $\forall u\in H^{m,p}(\Omega)$，利用 Hoelder 不等式及 (3.5.36)，有

$$\begin{aligned}\|u\|^q_{0,q,\Omega^k}&=\int_{\Omega^k}|u|^q dx_k=\int_{\Omega^k}|u|^{q(\lambda+\mu)}dx_k\\&\leqslant\left\{\int_{\Omega_k}|u|^{q_1}dx_k\right\}^{\frac{\lambda q}{q_1}}\cdot\left\{\int_{\Omega_k}|u|^{q_0}dx_k\right\}^{\frac{\mu q}{q_0}}\\&=\|u\|^{\lambda q}_{0,q_1,\Omega^k}\cdot\|u\|^{\mu q}_{0,q_0,\Omega^k}\leqslant c_1\|u\|^{\lambda q}_{0,q_1,\Omega^k}\|u\|^{\mu q}_{m,p,\Omega}\end{aligned}$$

即

$$\|u\|_{0,q,\Omega^k}\leqslant c\|u\|^{\lambda}_{0,q_1,\Omega^k}\|u\|^{\mu}_{m,p,\Omega} \tag{3.5.39}$$

如果 $\{u_i\}$ 是 $H^{m,p}(\Omega)$ 中一有界序列，由嵌入 (3.5.37) 是紧的，知在 $\{u_i\}$ 中存在一个在 $L^{q_1}(\Omega^k)$ 中收敛的子序列 $\{u'_i\}$，从而是 $L^{q_1}(\Omega^k)$ 中的 Cauchy 序列．又由 (3.5.39) 知 $\{u'_i\}$ 也是 $L^{q}(\Omega^k)$ 中的 Canchy 序列，因而嵌入 (3.5.38) 是紧的． 证毕．

下面给出 $H^{m,p}(\Omega)$ 紧嵌入的 Rellich－*Кондрашев* 定理，其详细证明请参阅 Adams[2] 第六章．

**定理 3.5.12** 设 $\Omega$ 是 $R^n$ 中的一个区域，$\Omega_0$ 是 $\Omega$ 的有界子区域；$\Omega^k$ 是 $\Omega$ 与 $R^n$ 中一个 $k$ 维超平面的交，又设 $j(\geq 0)$，$m(\geq 1)$ 是整数，$1 \leq p \leq \infty$，那么

(1) 如果$\Omega$具有锥性质并且$mp \leq n$，则下面的嵌入是紧的：

$$H^{j+m,p}(\Omega)紧嵌入H^{j,q}(\Omega_0^k) \tag{3.5.40}$$

其中 $0 < n-mp < k \leq n$，$1 \leq q < kp/(n-mp)$

$$H^{j+m,p}(\Omega)紧嵌入H^{j,q}(\Omega_0^k) \tag{3.5.41}$$

其中 $n = mp$，$1 \leq k \leq n$，$1 \leq q \leq \infty$.

(2) 如果 $\Omega$ 具有锥性质并且 $mp > n$，则下面的嵌入是紧的：

$$H^{j+m,p}(\Omega)紧嵌入C_B^j(\Omega_0) \tag{3.5.42}$$

$$H^{j+m,p}(\Omega)紧嵌入H^{j,q}(\Omega_0^k) \quad 1 \leq q \leq \infty \tag{3.5.43}$$

(3) 如果 $\Omega$ 是 L 型区域，则下面嵌入是紧的；

$$H^{j+m,p}(\Omega)紧嵌入C^j(\overline{\Omega}_0) \tag{3.5.44}$$

其中$mp > n$.

$$H^{j+m,p}(\Omega)紧嵌入C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}_0) \tag{3.5.45}$$

其中$mp > n \geq (m-1)p$，$0 < \lambda < m-(n/p)$.

(4) 若 $\Omega$ 是 $R^n$ 的任意区域，在嵌入 (3.5.41)—(3.5.45) 中用 $H_0^{j+m,p}(\Omega)$ 代替 $H^{j+m,p}(\Omega)$，所得到的嵌入也是紧的．

如果 $\Omega$ 是有界的，则本定理的叙述中 $\Omega_0$ 可以等于 $\Omega$.

## § 3.6 СОБОЛЕВ 空间中的等价范数

线性赋范空间 $X$ 中，范数 $\|\cdot\|_X$ 和范数 $\|\cdot\|_X^*$ 称为等

价，如果存在两个正的常数 $c_1$、$c_2$，使得

$$c_1\|x\|_X^* \leqslant \|x\|_X \leqslant c_2\|x\|_X^* \qquad \forall x\in X$$

显然，两种范数等价，意味着在一种范数意义下收敛的序列，按另一种范数也收敛.因此，由收敛派生出来的其它概念也是等价的.

以下设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是 L 型区域.

**定理 3.6.1** 设 $m$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中次数 $\leqslant k-1$ 的线性独立的多项式的个数，即 $m=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant k-1}1=\dim P_{k-1}(\Omega)$，$\alpha\in Z_+^n$. $f_i(u)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ 是 $\mathbf{H}^{k,p}(\Omega)$ 上的连续线性泛函，它们在 $k-1$ 次多项式上不同时为零．则范数

$$\|u\|_{k,p,\Omega}^* = \left(\sum_{i=1}^{m}|f_i(u)|^p + |u|_{k,p,\Omega}^p\right)^{1/p} \tag{3.6.1}$$

等价于范数 $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$.即存在两个常数 $c_1$，$c_2>0$，使得

$$c_1\|u\|_{k,p,\Omega}^* \leqslant \|u\|_{k,p,\Omega} \leqslant c_2\|u\|_{k,p,\Omega}^* \tag{3.6.2}$$

证　由于 $|u|_{k,p,\Omega}\leqslant\|u\|_{k,p,\Omega}$ 以及 $|f_i(u)|\leqslant c_i\|u\|_{k,p,\Omega}$，故 (3.6.2) 中左边第一个不等式是显然的．

下面证明 (3.6.2) 中 $\|u\|_{k,p,\Omega}\leqslant c_2\|u\|_{k,p,\Omega}^*$.用反证法，若此式不成立，则存在一个序列 $\{v_l\}_{l=1,\infty}$，$v_l\in\mathbf{H}^{k,p}(\Omega)$，使得 $\forall l\leqslant 1$，$\|v_l\|_{k,p,\Omega}=1$ 以及

$$\lim_{l\to\infty}\left(|v_l|_{k,p,\Omega}^p + \sum_{i=1}^{m}|f_i(v_l)|^p\right)=0 \tag{3.6.3}$$

因为序列 $\{v_l\}$ 在 $\mathbf{H}^{k,p}(\Omega)$ 中是有界的以及 $\mathbf{H}^{k,p}(\Omega)$ 紧嵌入 $\mathbf{H}^{k-1,p}(\Omega)$，由定理 3.5.11 知，在 $\{v_l\}$ 中存在一个子序列，仍

记为$\{v_l\}$，以及$v\in H^{k-1,p}(\Omega)$，使得

$$\lim_{l\to\infty}\|v_l-v\|_{k-1,p,\Omega}=0 \tag{3.6.4}$$

又由(3.6.3)有

$$\lim_{l\to\infty}|v_l|_{k,p,\Omega}=0 \tag{3.6.5}$$

故$\{v_l\}$是$H^{k,p}(\Omega)$中Cauchy序列，而$H^{k,p}(\Omega)$是完备的，因此$\{v_l\}$在$H^{k,p}(\Omega)$中收敛．从而这个序列$\{v_l\}$的极限$v$满足

$\forall\alpha\in Z^n_+$，$|\alpha|=k$时，$|\partial^\alpha v|_{o,p,\Omega}=\lim\limits_{l\to\infty}|\partial^\alpha v_l\quad|_{o,p,\Omega}=0$，从而$\partial_\alpha v$

$=0$. 根据定理 3.2.12，知$v$是一个次数不超过$k-1$的多项式．
而由 (3.6.3) 还可知

$$f_i(v)=\lim_{l\to\infty}f_i(v_l)=0 \qquad (i=1,2,\cdots m)$$

则由定理的假设知$v=0$.而这与$\|v_l\|_{k,p,\Omega}=1$，$l=1$，2，…，相矛盾．证毕.

使用定理 3.6.1 和嵌入定理可以导出许多有用的不等式.

设空间为$H^{1,p}(\Omega)$，则$k=1$.根据定理 3.6.1，此时多项式是零次的，而线性独立的零次多项式个数$m=1$，故只须取一个连续线性泛函$f_1(u)$即可.

(1) 取$f_1(u)=\int_\Omega u dx$，当$\Omega$是L型区域时，$f_1$是

$H^{1,p}(\Omega)$上线性连续泛函.

$$|f_1(u)|\leqslant(\mu(\Omega))^{1/q}\|u\|_{o,p,\Omega}\leqslant c\|u\|_{1,p,\Omega}$$
$$(1/p+1/q=1)$$

对任何零次多项式$\alpha=\text{const}$，$f(\alpha)=(\mu(\Omega))$，$\alpha\neq 0$，故根据定

理3.6.1，有

$$\|u\|_{1,p,\Omega} \leqslant c\left(\left|\int_{\Omega} u dx\right|^{p} + |u|_{1,p,\Omega}^{p}\right)^{1/p} \quad \forall u \in H^{1,p}(\Omega)$$

当p=2时，它就是Poincare不等式.

(2) 取$f_1(u) = \int_{\partial\Omega} u ds$，则由Hoelder不等式有

$$|f_1(u)| \leqslant c\|u\|_{0,q,\partial\Omega}$$

由定理3.5.4，取$j=0$，$m=1$，$k=n-1$，且只要$p \leqslant q \leqslant (n-1)p/(n-p)$,则有$H^{1,p}(\Omega)$嵌入$L^{q}(\partial\Omega)$，$\|u\|_{0,q,\partial\Omega} \leqslant c_1\|u\|_{1,p,\Omega}$。从而 $|f_1(u)| \leqslant c_2\|u\|_{1,p,\Omega}$，所以$f_1(u)$是$H^{1,p}(\Omega)$上线性有界泛函.由定理3.6.1有

$$\|u\|_{1,p,\Omega} \leqslant c\left(\left|\int_{\partial\Omega} u ds\right|^{p} + |u|_{1,p,\Omega}^{p}\right)^{1/p} \quad \forall u \in H^{1,p}(\Omega)$$

从而

$$\|u\|_{0,p,\Omega} \leqslant c\left(\left|\int_{\partial\Omega} u ds\right|^{p} + |u|_{1,p,\Omega}^{p}\right)^{1/p} \quad \forall u \in H^{1,p}(\Omega)$$

当p=2时，它就是一般形式的Friedrichs不等式.

特别地，如果$u \in H_0^{1,p}(\Omega)$，则$\int_{\partial\Omega} u ds = 0$，故有

$$\|u\|_{0,p,\Omega} \leqslant c|u|_{1,p,\Omega} \quad \forall u \in H_0^{1,p}(\Omega)$$

这与定理3.4.3的形式一致.

(3) 设$\partial\Omega$上的度量$ds$恒正，令$\partial\Omega = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$，$\Gamma_1$为开集.取泛函$f_1(u) = \int_{\Gamma_1} u ds$，和(2)中类似地讨论，易知

$$|f_1(u)| \leqslant c\|u\|_{0,q,\Gamma_1} \leqslant c\|u\|_{0,q,\partial\Omega} \leqslant c'\|u\|_{1,p,\Omega}$$

从而 $f_1(u)$是 $H^{1,p}(\Omega)$上的线性连续泛函.由定理 3.6.1 得

$$\|u\|_{1,p,\Omega} \leqslant c\left(\left|\int_{\Gamma_1} uds\right|^p + |u|^p_{1,p,\Omega}\right)^{1/p} \quad \forall u \in H^{1,p}(\Omega)$$

或

$$\|u\|_{0,p,\Omega} \leqslant c\left(\left|\int_{\Gamma_1} uds\right|^p + |u|^p_{1,p,\Omega}\right)^{1/p} \quad \forall u \in H^{1,p}(\Omega)$$

如引进空间

$$V = \left\{u \in H^{1,p}(\Omega) : u|_{\Gamma_1} = 0\right\} \tag{3.6.6}$$

则有

$$\|u\|_{0,p,\Omega} \leqslant c|u|_{1,p,\Omega} \quad \forall u \in V \tag{3.6.7}$$

即对空间 V，Friedrichs 不等式同样成立.

从而有下述定理，

**定理 3.6.2** 设 $\Omega$ 是 $R^n$ 的有界单连通域，则由(3.6.6)定义的空间 V 是 $H^{1,p}(\Omega)$的闭子空间，而且存在常数 $c>0$，使得

$$\|u\|_{0,p,\Omega} \leqslant c|u|_{1,p,\Omega} \quad \forall u \in V \tag{3.6.8}$$

即在空间 V 上，全范和半范等价.

**证** (3.6.8)可由(3.6.7)直接得出.现在利用嵌入定理证明 V 是 $H^{1,p}(\Omega)$是的闭子空间.设$\{u_n\}$嵌入 V，且

$$\|u_n - u\|_{1,p,\Omega} \to 0, \text{ 当} n \to \infty \text{时}$$

由定理 3.5.4 知，当 $p \leqslant q \leqslant (n-1)p/(n-p)$时，$H^{1,p}(\Omega)$嵌入 $L^q(\partial\Omega)$，有

$$\|u_n - u\|_{0,q,\partial\Omega} \leqslant c\|u_n - u\|_{1,p,\Omega}$$

因此，$u_n$ 在 $\partial\Omega$ 上几乎处处收敛于 $u|_{\partial\Omega}$，又 $u_n|_{\Gamma_1} = 0$ (a.e.)，故 $u|_{\Gamma_1} = 0$ (*a.e.*)，从而得 $u \in V$,且 V 是闭的.

## § 3.7 商空间

设 M 是线性空间 X 中的一个线性子空间．对于两个向量 $x_1$，$x_2 \in X$，如果 $x_1 - x_2 \in M$，我们则称向量 $x_1$ 和 $x_2$ 关于模 M 是等价的．我们把 X 中与固定向量 $x$ 关于模 M 等价的一切向量所组成的集合记为 $\hat{x}$，即 $\hat{x} = \{y \in X : y - x \in M\}$ $= \{x + m : m \in M\}$. 集合 $X/M = \{\hat{x} : x \in X\}$ 是商集合．任意 $y \in \hat{x}$ 都是这个等价类 $\hat{x}$ 的代表，显然，$y \in \hat{x}$ 充要条件是 $x \in \hat{y}$ 以及 $\hat{x} = \hat{y}$. 如果把每个等价类看作一个新的空间的向量，类的加法运算和类同数的乘法定义为

$$\hat{x} + \hat{y} = (x \hat{+} y), \quad \alpha\hat{x} = (\widehat{\alpha x}).$$

那么 X / M 是一线性空间.

设 X 是 Banach 空间，其范数为 $\|\cdot\|_X$，如果在 X / M 中引入范数

$$\|\hat{x}\|_{X/M} = \inf_y \{\|y\|_X ; y \in \hat{x}\} = \inf_m \{\|x + m\|_X ; m \in M\}$$

则 X / M 也是一 Banach 空间，商映射 q: X→X / M 的算子范数 $\|q\|_{L(X, X/M)} = 1$.

设 $P_k(\Omega)$ 是由所有次数不超过 $k$ 的多项式的全体组成的线性空间，其维数为 $N = \sum_{|\alpha| \le k} 1$，$\alpha \in Z^n_+$，而 $P_k(\Omega)$ 的线性无关的基向量记为 $p_k^{(1)}$，$p_k^{(2)}$，$\cdots p_k^{(N)}$. $H^{k+1,p}(\Omega)$ 中任意两个相差一个 $k$ 次多项式的元素属于同一等价类，考虑商空间 $H^{k+1,p}(\Omega)/P_k$. 此时其商范数

$$\|\hat{v}\|_{k+1,p,\Omega} = \inf_{p \in P_k} \|v + p\|_{k+1,p,\Omega} \qquad \forall \hat{v} \in H^{k+1,p}(\Omega)/P_k$$

其中

$$\hat{v}=\left\{u\in \mathrm{H}^{k+1,p}(\Omega),\ u-v\in \mathrm{P}_k\right\} \tag{3.7.1}$$

而商空间 $\mathrm{H}^{k+1,p}(\Omega)/\mathrm{P}_k$ 的半范

$$|\hat{v}|_{k+1,p,\Omega}=\inf_{p\in \mathrm{P}_k}|v+p|_{k+1,p,\Omega}\quad \forall \hat{v}\in \mathrm{H}^{k+1,p}(\Omega)/\mathrm{P}_k$$

显然

$$|\hat{v}|_{k+1,p,\Omega}=|v|_{k+1,p,\Omega}$$

并且

$$\begin{aligned}\|v+p\|_{k+1,p,\Omega}&=\left\{|v|^p_{k+1,p,\Omega}+\|v+p\|^p_{k,p,\Omega}\right\}^{1/p}\\&\geqslant |v|_{k+1,p,\Omega}\end{aligned}$$

此即

$$|\hat{v}|_{k+1,p,\Omega}\leqslant \|\hat{v}\|_{k+1,p,\Omega}$$

对于 $p=\infty$ 时，范数应作相应修改.事实上，在商空间上，全范和半范是等价的，这是一个非常重要的结果.即

**定理 3.7.1** 若 $\Omega\subset \mathrm{R}^n$ 是 L 型的，则在商空间 $\mathrm{H}^{k+1,p}(\Omega)/\mathrm{P}_k$ 中，商范数 $\|\hat{v}\|_{k+1,p,\Omega}$ 和半范 $|v|_{k+1,p,\Omega}$ 等价．即存在常数 $c(\Omega)$，使得

$$|\hat{v}|_{k+1,p,\Omega}\leqslant \|\hat{v}\|_{k+1,p,\Omega}\leqslant c|\hat{v}|_{k+1,p,\Omega}. \tag{3.7.2}$$

**证** 这里只证明 (3.7.2) 式右端不等式．设 $m$ 是 $\mathrm{R}^n$ 中、次数 $\leqslant k$ 的多项式空间 $\mathrm{P}_k(\Omega)$ 的基函数 $\{\varphi_i\}$ 的个数，即 $m=\dim\ \mathrm{P}_k(\Omega)$. 相应地 $\mathrm{P}_k(\Omega)$ 的对偶空间的基函数为 $\{f_j\}$，满足 $f_i(\varphi_j)=\delta_{ij}$，$1\leqslant i,j\leqslant m$. 用 Hahn—Banach 延拓定理，在空间 $\mathrm{H}^{k+1,p}(\Omega)$ 上存在线性连续泛函，仍记为 $\{f_j\}$，使得 $\forall p$

$\in \mathbf{P}_k(\Omega)$，$f_j(p)=0(1\leqslant j\leqslant m)$ 的充要条件是 $p=0$. 且 $\{f_j\}$ 满足定理 3.6.1 的条件，故

$$\|u\|_{k+1,p,\Omega}\leqslant c\left(\sum_{j=1}^{m}|f_j(u)|^p+|u|_{k+1,p,\Omega}^p\right)^{1/p} \tag{3.7.3}$$

另一方面，$\forall v\in \mathbf{H}^{k+1,p}(\Omega)$，存在一个 $p_v\in \mathbf{P}_k(\Omega)$，使得

$$f_j(v+p_v)=0 \qquad 1\leqslant j\leqslant m \tag{3.7.4}$$

事实上，只要取

$$p_v=-\sum_{l=1}^{m} f_l(v)\varphi_l$$

则有 $f_j(v+p_v)=f_j(v)+f_j(p_v)=f_j(v)-\sum_{l=1}^{m}f_l(v)f_j(\varphi_l)=0.$

在 (3.7.3) 中取 $u=v+p_v$，　　$\forall v\in \mathbf{H}^{k+1,p}(\Omega)$，有

$$\|v+p_v\|_{k+1,p,\Omega}\leqslant c|v|_{k+1,p,\Omega}$$

故　　$\|\hat{v}\|_{k+1,p,\Omega}\leqslant c|v|_{k+1,p,\Omega}$. 证毕.

# 第四章　实数阶 COБOЛEB 空间和迹空间

本章把整数阶 Соболев 空间 $H^m(\Omega)$推广到任意实数阶 $H^s(\Omega)$情况，研究它的结构及性质.同时研究定义在边界上的函数空间，尤其是 $H^{m,p}(\Omega)$中的函数在边界上所形成的迹空间.

## § 4.1　$H^s(\mathbf{R}^n)(s\in\mathbf{R})$空间

我们知道，$H^m(\mathbf{R}^n)$空间装备着范数

$$\|u\|_{m,\mathbf{R}^n}^2=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_{\mathbf{R}^n}|\partial^\alpha u|^2dx\qquad\forall u\in H^m(\mathbf{R}^n)$$

由 Fourier 变换性质可知，$\partial^\alpha u\in L^2(\mathbf{R}^n)$，$\forall|\alpha|\leqslant m$ 等价于 $\xi^\alpha\hat{u}(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n)$，$\forall|\alpha|\leqslant m$. 容易验证，存在常数 $c_1$ 和 $c_2$，使得

$$c_1(1+|\xi|^2)^m\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant m}|\xi^\alpha|^2\quad\leqslant c_2(1+|\xi|^2)^m\qquad\forall\xi\in\mathbf{R}^n$$

因此　$(1+|\xi|^2)^{m/2}\quad\hat{u}(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n)$，而且泛函

$u\to\left(\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^m(\hat{u}(\xi))^2d\xi\right)^{1/2}$ 满足范数定义的要求，所以也可以作为 $H^m(\mathbf{R}^n)$ 中的一个范数.

另一方面，由 Fourier 变换的 Plancherel 定理(定理 1.9.4)有

$$(2\pi)^n\int_{\mathbf{R}^n}|\partial^\alpha u|^2dx=\int_{\mathbf{R}^n}|F\partial^\alpha u|^2dx=\int_{\mathbf{R}^n}(|\xi|^\alpha\hat{u})^2d\xi$$

故有

$$c_1\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^m|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\leqslant\|u\|_{m,\mathbf{R}^n}^2$$

$$\leqslant c_2\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^m|\hat{u}(\xi)|^2d\xi$$

此即，在空间 $\mathbf{H}^m(\mathbf{R}^n)$中，可以定义等价范数

$$\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^m|\hat{u}(\xi)|^2d\xi$$

由于上式对于任何 $m$，不管是整数还是非整数，都是有意义的，并且符合范数定义要求，我们可以以此来定义实数阶 Соболев 空间：

**定义 4.1.1** 设 $s\in\mathbf{R}$，$\mathbf{S}'(\mathbf{R}^n)$ 为缓增广义函数空间，$\forall u\in\mathbf{S}'(\mathbf{R})$，$\hat{u}$ 是其 Fourier 变换，记

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)=\{u:\ u\in\mathbf{S}'(\mathbf{R}^n),\ (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\in\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)\}$$

并赋以内积和范数

$$(u,\ v)=\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)d\xi,\qquad \forall\ u,\ v\in\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)\tag{4.1.1}$$

$$\|u\|^2_{s,\mathbf{R}^n}=\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2d\xi,\qquad \forall\ u,\ v\in\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)\tag{4.1.2}$$

则称$\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$为实数阶 Соболев 空间.

**定理 4.1.1** 对每个实数 $s$，$\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$ 是一个 Hilbert 空间.

**证** 只须证明 $\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$ 对范数 $\|u\|_{s,\mathbf{R}^n}$ 是完备的即可.设 $\{u_i\}$ 是 $\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$ 内的 Cauchy 序列，由定义，$\{(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}_i\}$ 是 $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 内的 Cauchy 序列，又 $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 是完备的，所以序列 $\{(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}_i\}$ 在 $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 内收敛于$\hat{v}$.由 $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)\subset\mathbf{S}'(\mathbf{R}^n)$，有$\hat{v}\in\mathbf{S}'(\mathbf{R}^n)$.又由

$$\begin{aligned}\hat{v}(\xi)&=(1+|\xi|^2)^{s/2}(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{v}(\xi)\\&=(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)\end{aligned}$$

其中$\hat{u}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{v}(\xi)$.由缓增广义函数的性质易知，如

果 $p(\xi)$ 是一多项式，则 $p(\xi)\hat{v}(\xi)$，$\hat{v}(\xi)/p(\xi)$(此时 $p(\xi)>0$)都是缓增广义函数．所以$\hat{u}(\xi)\in S'(R^n)$．又 Fourier 变换是 $S'(R^n)$ 到 $S'(R^n)$ 的同构，则有$\hat{u}(\xi)\in S'(R^n)$．注意到

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)=\hat{v}(\xi)\in L^2(R^n)$$

及定义 4.1.1，有 $u(\xi)\in H^s(R^n)$　以及 $\{u_l\}$ 在 $H^s(R^n)$ 中收敛于 $u$. 证毕．

由于 (4.1.2) 和 $\|\cdot\|_{m,R^n}$ 是等价的（当 $s=m$ 时）以及定理 4.1.1，今后当 $s=m$ 时，空间 $H^s(R^n)$ 与 $H^m(R^n)$ 不加区别．

对于 s 为非整数时，我们考察另一种范数定义.为此，给出几个引理.

引理 4.1.1　如果 $0\leqslant s\leqslant 1$，则

$$\|u\|_{s,R^n}^2\leqslant(2\pi)^{-n}\int_{R^n}|\hat{u}|^2(1+|\xi|^{2s})d\xi\leqslant c\|u\|_{s,R^n}^2$$

$$\forall u\in H^s(R^n),\tag{4.1.3}$$

其中$c$为常数.

证　由

$$1=\frac{1}{1+|\xi|^2}+\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\leqslant\frac{1+|\xi|^{2s}}{(1+|\xi|^2)^s}$$

$$=\left(\frac{1}{1+|\xi|^2}\right)^s+\left(\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\right)^s\leqslant 2$$

可得$(1+|\xi|^2)^s\leqslant(1+|\xi|^{2s})\leqslant 2(1+|\xi|^2)^s$，$\forall\xi\in R^n$，$s\in[0,1]$，从而可得有本命题结果.证毕.

引理 4.1.2　如果 $0\leqslant s\leqslant 1$，则有

$$(2\pi)^{-n}\int_{R^n}(1+|\xi|^{2s})|\hat{u}|^2d\xi$$

$$=\|u\|_{0,R^n}^2+c\int_{R^n}\int_{R^n}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy$$

$$\forall u \in H^s(\mathbf{R}^n),$$

其中 c 是一个只依赖于(n, s)的常数.

**证** 利用 Parseval 等式(1.9.15), 我们只须证明

$$(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}|\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= c_2\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy$$

为此, 注意到$\hat{u}(x+y)=\hat{u}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}$(对 $y$ 施行变换), 有

$$\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|u(x)-u(y)|^2\ |x-y|^{-n-2s}\quad dxdy$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|u(x+y)-u(y)|^2\ |x|^{-n-2s}\quad dxdy$$

$$=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}|e^{i<x,\xi>}-1|^2\ |x|^{-n-2s}\ |\hat{u}(\xi)|^2 dxd\xi$$

$$=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}I(\xi)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

这里 $I(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}|e^{i<x,\xi>}-1|^2\ |x|^{-n-2s}dx$, 当 $s\leqslant 1$ 时, $I(\xi)$ 是收敛的, 且对 $\mathbf{R}^n$ 中的旋转变换 R 是不变的, 即

$$I(\mathbf{R}\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}|e^{i<\mathbf{R}^t x,\xi>}-1|^2\ |x|^{-n-2s}dx$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n}|e^{i<x',\xi>}-1|^2\ |x'|^{-n-2s}dx'=I(\xi)$$

这里 $x'=\mathbf{R}^t x$, 所以 $I(\xi)$ 仅仅赖于 $|\xi|$, 设 $r\in\mathbf{R}$, 则

$$I(r\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}|e^{i<rx,\xi>}-1|^2\ |x|^{-n-2s}dx=r^{2s}I(\xi)$$

这表明，$I(\xi)$ 是 $|\xi|$ 的 $2s$ 次齐次函数，故 $I(\xi)=c_2|\xi|^{2s}$. 此即所求的结论．证毕．

引理 4.1.1 和 4.1.2 表明，对于空间 $H^s(R^n)$，$0\leqslant s\leqslant 1$，可以引入等价范数

$$\left\{\|u\|_{0,R^n}^2+c\int_{R^n}\int_{R^n}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\right\}^{1/2}$$

而当 $m\leqslant s\leqslant m+1$，$m$ 为整数时，记 $s=m+\sigma$，$0\leqslant\sigma<1$，

$$\|u\|_{s,R^n}^2=\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2d\xi=\|u\|_{m,R^n}^2+\|u\|_{\sigma,R^n}^2$$

即对任意 $s\in R$，记 $[s]$ 为 $s$ 最大的整数部分，则可在 $H^s(R^n)$ 中定义等价范数，$s=[s]+\sigma$，$0\leqslant\sigma<1$，

$$\|u\|_{s,R^n}^2=\|u\|_{[s],R^n}^2+c_s\sum_{|\alpha|=[s]}\|\partial^{\alpha}u\|_{\sigma,R^n}^2\qquad\forall u\in H^s(R^n)\tag{4.1.4}$$

这里

$$\|u\|_{\sigma,R^n}^2=\int_{R^n}\int_{R^n}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\sigma}}dxdy$$

其中 $c_s$ 是只与 $n$ 和 $s$ 有关的常数．因而 $H^s(R^n)$ 也可定义为检验函数空间 $C^\infty(R^n)$ 在范数 (4.1.4) 下的闭包．

现在，让我们引入线性算子 $A^s$

$$A^s u=F^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2}Fu),\ \forall u\in S'(R^n),\tag{4.1.5}$$

这里 $F$，$F^{-1}$ 分别是 Fourier 变换及其逆变换．由定理 1.9.3 知，$F$ 是由 $S'(R^n)$ 到 $S'(R^n)$ 上的同构，而乘子 $(1+|\xi|^2)^{s/2}$ 也是由 $S'(R^n)$ 到 $S'(R^n)$ 上的同构，由此可知 $A^s$ 是 $H^s(R^n)$ 到 $H^0(R^n)=L^2(R^n)$ 上的同构．由 Parseval 等式 (1.9.15) 知

$$(u,\ v)_s=\int_{R^n}A^s u\cdot\overline{A^s v}dx\tag{4.1.6}$$

特别，$\Lambda^s$ 是 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 到 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 上的同构．由此容易证明下列嵌入关系．

**定理4.1.2** 设 s 和 t 都是实数，且 $s \geq t$，则有

$$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)\text{嵌入}H^s(\mathbf{R}^n)\text{嵌入}H^t(\mathbf{R}^n)\text{嵌入}S'(\mathbf{R}^n) \qquad (4.1.7)$$

并且$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$ 在 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 中稠密．

证　首先考虑 $s \geq t$，$H^s(\mathbf{R}^n)$ 嵌入 $H^t(\mathbf{R}^n)$．由定义4.1.1，$\forall u \in H^s(\mathbf{R}^n)$

$$\int_{\mathbf{R}^n} |(1+|\xi|^2)^{t/2}\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbf{R}^n} |(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

此即 $\|u\|_{t,\mathbf{R}^n} \leq \|u\|_{s,\mathbf{R}^n}$，从而 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 嵌入 $H^t(\mathbf{R}^n)(s \geq t)$.

其次证明$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$ 嵌入 $H^s(\mathbf{R}^n)$. 因为算子 $\Lambda^s$ 是$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$ 到$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$ 的同构，同时也是 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 到 $H^o(\mathbf{R}^n) = L^2(\mathbf{R}^n)$ 的同构，故只须证明$\tilde{S}(\mathbf{R}^n)$ 嵌入 $H^o(\mathbf{R}^n) = L^2(\mathbf{R}^n)$ 即可．

$\forall u \in \tilde{S}(\mathbf{R}^n)$，有

$$\|u\|^2_{o,\mathbf{R}^n} = \int_{\mathbf{R}^n} (1+|x|^2)^{-n}(1+|x|^2)^n|u(x)|^2 dx$$

从而

$$\|u\|_{o,\mathbf{R}^n} \leq c\sup((1+|x|^2)^{n/2}|u(x)|)$$

$$c = \int_{\mathbf{R}^n} (1+|x|^2)^{-n} dx$$

下面考虑 $H^t(\mathbf{R}^n)$ 嵌入 $S'(\mathbf{R}^n)$. 事实上，和上面的讨论类似，我们只考虑 $t=0$ 的情况，即 $H^o(\mathbf{R}^n) = L^2(\mathbf{R}^n)$ 嵌入 $S'(\mathbf{R}^n)$. $\forall u \in H^o(\mathbf{R}^n)$ 以及 $\varphi \in S(\mathbf{R}^n)$，有

$$|\langle u, \varphi \rangle| = |(u, \varphi)| \leq \|u\|_{o,\mathbf{R}^n} \|\varphi\|_{o,\mathbf{R}^n}$$

这里 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的内积．从而

$$\|u\|_{S'(\mathbf{R}^n)} = \sup_{\varphi\in S(\mathbf{R}^n)} \frac{|<u,\varphi>|}{\|\varphi\|_{0,\mathbf{R}^n}} \leqslant \|u\|_{0,\mathbf{R}^n}.$$

最后，证明$\tilde{\mathrm{S}}(\mathbf{R}^n)$在$\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^n)$中稠密．因为$\mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$在$\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$中稠密以及$\mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$在$\tilde{\mathrm{S}}(\mathbf{R}^n)$中稠密，从而$\tilde{\mathrm{S}}(\mathbf{R}^n)$在$\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)$中稠密．又由算子$A^s$的定义知$A^{-s}(\tilde{\mathrm{S}}(\mathbf{R}^n))=\tilde{\mathrm{S}}(\mathbf{R}^n)$在$A^{-s}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n))=\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^n)$中稠密．证毕．

顺便指出，从$\mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$在$\tilde{\mathrm{S}}(\mathbf{R}^n)$中的稠密性以及$\tilde{\mathrm{S}}(\mathbf{R}^n)$嵌入$\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^n)$，可得$\mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$在$\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^n)$中是稠密的．

引理 4.1.3　如果$u\in\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^n)$，$\forall h\in\mathbf{R}^n$，$\tau_h u$是$u$的平移，即$(\tau_h u)(x)=u(x-h)$．则$\tau_h u\in H^s(\mathbf{R}^n)$，$\|\tau_h u\|_{s,\mathbf{R}^n}=\|u\|_{s,\mathbf{R}^n}$以及当$h\to 0$时，在$\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^n)$中有$\tau_h u\to u$．特别地，当$h=(0,\ \cdots,\ 0,\ h_j,\ 0,\ \cdots,\ 0)$，则$h_j\to 0$时，在$\mathrm{H}^{s-1}(\mathbf{R}^n)$中，差商

$$\frac{\tau_h u - u}{h_j} \to \partial_j u \tag{4.1.8}$$

证　$\forall u\in\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^n)$和$h\in\mathbf{R}^n$，由 Fourier 变换的定义有$\widehat{\tau_h u}(\xi)=e^{ih\cdot\xi}\hat{u}(\xi)$，从而$\tau_h u\in\mathrm{H}^s(\mathbf{R}^n)$，$\|\tau_h u\|_s=\|u\|_s$．以及$h\to 0$时，由 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\|\tau_h u - u\|_{s,\mathbf{R}^n}^2 = \int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 |e^{ih\xi}-1|^2 d\xi \to 0.$$

类似地，有

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\tau_h u - u}{h_j} - \partial_j u\right\|_{s-1,\mathbf{R}^n}^2 \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s-1} |\hat{u}(\xi)|^2 \left|\frac{e^{ih_j\xi_j}-1}{h_j} - i\xi_j\right|^2 d\xi
\end{aligned}$$

注意到$h_j\to 0$时，$\dfrac{e^{ih_j\xi_j}-1}{h_j}-i\xi_j\to 0$，故再次利用 Lebesgue 控制收敛定理得出所需结论．证毕．

把由是 $\{u,v\}\to\langle u,v\rangle$ 定义的$\tilde{S}(R^n)\times\tilde{S}(R^n)$ 上的双线性形式延拓到 $H^s(R^n)\times H^{-s}(R^n)$ 上由 $u,v\to\int_{R^n}\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)d\xi$ 定义的连续双线性形式，仍记为 $\langle u, v\rangle$，则有

**定理 4.1.3** $\forall u\in H^s(R^n)$，$v\in H^{-s}(R^n)$ 有

$$|\langle u, v\rangle|\leqslant\|u\|_{s,R^n}\|v\|_{-s,R^n} \tag{4.1.9}$$

从而有在代数和拓扑的意义下，$H^s(R^n)$ 的对偶和 $H^{-s}(R^n)$ 是相同的，即$[H^s(R^n)]'\simeq H^{-s}(R^n)$.

**证** $\forall u\in H^s(R^n)$，$v\in H^{-s}(R^n)$，有

$$\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)\cdot(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{v}(\xi)$$

故

$$\begin{aligned}|\langle u, v\rangle|&=\left|\int_{R^n}\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)d\xi\right|\\&\leqslant\left(\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}\\&\cdot\left(\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^{-s}|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}\\&=\|u\|_{s,R^n}\cdot\|v\|_{-s,R^n}\end{aligned}$$

这里用了Schwarz不等式.

下面证明$[H^s(R^n)]'\simeq H^{-s}(R^n)$. 首先证 $H^{-s}(R^n)\subset(H^s(R^n))'$. 设 $v\in H^{-s}(R^n)$，则我们由

$$l(u)=\langle u, v\rangle \qquad \forall u\in H^s(R^n)$$

定义 $H^s(R^n)$ 上的线性连续泛函．即通过 $v\in H^{-s}(R^n)$ 定义一个对应的 $l\in(H^{-s}(R^n))'$. 反之，我们证，$(H^s(R^n))'\subset H^{-s}(R^n)$. 为此若 $l\in(H^s(R^n))'$，由定理 4.1.1，以及 Riesz 表现定理知，存在唯一的 $f\in H^s(R^n)$，使得

$$l(u)=(f, u), \qquad \forall u\in H^s(R^n)$$

以及 $\|l\|^* = \|f\|_{s,\mathbf{R}^n}$，这里 $\|\cdot\|^*$ 表示对偶空间 $(\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n))'$ 的对偶范数．

$\forall u \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$，由(4.1.1)有

$$l(u) = (f,\ u)_s = \int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \hat{f}(\xi)\hat{u}(\xi)d\xi = \langle u,\ v \rangle$$

其中 $v \in \mathbf{S}'(\mathbf{R}^n)$，$\hat{v} = (1+|\xi|^2)^s \hat{f}$. 因为 $f \in \mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$，所以 $v \in \mathbf{H}^{-s}(\mathbf{R}^n)$，而且

$$\begin{aligned}\|v\|^2_{-s,\mathbf{R}^n} &= \int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-s} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-s} (1+|\xi|^2)^{2s} |\hat{f}|^2 d\xi \\ &= \|f\|^2_{s,\mathbf{R}^n} = \|l\|^*\end{aligned}$$

证毕.

下面的定理给出了 $m$ 是一个非负整数时 $\mathbf{H}^{-m}(\mathbf{R}^n)$ 的结构，其证明是建立在 $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 的 Fourier 变换性质的基础上的．它是定理 3.3.1 当 $\Omega = \mathbf{R}^n$，$p = 2$ 时的一个特殊情况．

**定理 4.1.4** 设 $m \geqslant 0$ 是一个整数，则每个 $u \in \mathbf{H}^{-m}(\mathbf{R}^n)$ 可表示为有限个平方可积函数的导数（导数的阶 $\leqslant m$）之和．即

$$u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \partial^\alpha f_\alpha, \qquad f_\alpha \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n) \tag{4.1.10}$$

**证** $\forall u \in \mathbf{H}^{-m}(\mathbf{R}^n)$，则由定义 4.1.1，知

$$(1+|\xi|^2)^{-m/2}\hat{u}(\xi) \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$$

由不等式 $(a+b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p + b^p)$，$1 \leqslant p < \infty$，等价地有

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\hat{u}(\xi)}{1+|\xi_1|^m + \cdots + |\xi_n|^m} \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$$

从而有

$$\hat{u}(\xi)=\hat{f}(\xi)+\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^m\hat{f}(\xi)=\hat{f}(\xi)+\sum_{j=1}^{n}\xi_j^m\left[\frac{|\xi_j|^m}{\xi_j^m}\hat{f}(\xi)\right]$$

$$=\hat{f}(\xi)+\sum_{j=1}^{n}(i\xi_j)^m\hat{f}_j(\xi)$$

其中 $\hat{f}_j(\xi)=\left(\frac{(-i|\xi_j|)^m}{\xi_j^m}\right)\hat{f}(\xi)\in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$，由 Fourier 变换的性质及定理 1.9.4，知

$$u(x)=f_0(x)+\sum_{j=1}^{n}\partial_j^m f_j(x)\qquad f_j\in\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$$

其中$0\leqslant j\leqslant n$，$f_0(x)=f(x)$. 证毕.

**引理 4.1.4** (Peetre 不等式) $\forall t\in\mathbf{R}$，$\xi$，$\eta\in\mathbf{R}^n$ 有

$$\left[\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right]^t\leqslant 2^{|t|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|t|}\tag{4.1.11}$$

证 $\forall\xi$，$\zeta\in\mathbf{R}^n$ 有

$$1+|\xi-\zeta|^2\leqslant 1+|\xi|^2+2|\xi\zeta|+|\zeta|^2$$
$$\leqslant 1+2|\xi|^2+2|\zeta|^2\leqslant 2(1+|\xi|^2)(1+|\zeta|^2)$$

令$\eta=\xi-\zeta$，有

$$1+\eta^2\leqslant 2(1+|\xi|^2)(1+|\xi-\eta|^2)$$

若 $t<0$，将上面的不等式两边同乘 $-t$ 次幂，即得 (4.1.11). 若 $t>0$，将上面的不等式 $\xi$ 和 $\eta$ 对调然后同乘 $t$ 次幂，也可得到 (4.1.11). 证毕.

**引理 4.1.5** 设 $K(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 上的一个连续函数，又设存在一个常数 $c>0$，使得

$$\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)|dx\leqslant c\qquad \text{关于}y\text{是一致的}$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)|dy\leqslant c\qquad \text{关于}x\text{是一致的}$$

则
$$Af(x)=\int_{\mathbf{R}^n}K(x,y)f(y)dx \tag{4.1.12}$$

确定一个从 $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 到 $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 内的连续线性泛函．

证 $\forall f,\ g\in\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$，由定义考察

$$|(Af,\ g)|=|\int_{\mathbf{R}^n}Af(x)\bar{g}(x)dx|$$

$$=|\iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}K(x,y)f(y)\overline{g(x)}dxdy|$$

$$\leqslant\iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}|K(x,y)|^{1/2}|f(y)|\ |K(x,\ y)|^{1/2}\ |g(x)|dxdy$$

$$\leqslant\left[\iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}|K(x,y)|\ |f(y)|^2dxdy\right]^{1/2}\cdot$$

$$\left[\iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n}|K(x,y)|\ |g(x)|^2dxdy\right]^{1/2}$$

$$\leqslant c\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}\|g\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

此即 $Af$ 是 $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 到 $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 的连续线性泛函，或 $A:\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)\to\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ 是一个连续线性算子，且 $A$ 的算子范数不超过 $c$，即

$$\|A\|_{L(L^2(\mathbf{R}^n))}\leqslant c \tag{4.1.13}$$

证毕．

**定理 4.1.5** $\forall\varphi\in\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{R}^n)$，$u\in\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$，则 $(\varphi,u)\to\varphi u$ 是从 $\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{R}^n)\times\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$ 到 $\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$ 的连续的线性形式，且

$$\|\varphi u\|_{s,\ \mathbf{R}^n}\leqslant c\|u\|_{s,\ \mathbf{R}^n} \tag{4.1.14}$$

证 $\forall\varphi\in\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{R}^n)$，$u\in\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$，由Fourier变换的性质有

$$\widehat{\varphi u}(\xi)=(2\pi)^{-n}\hat{\varphi}*\hat{u}(\xi)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)d\eta$$

首先证明 $\varphi u\in\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$，由定义4.1.1，要证明

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\varphi u}(\xi)\in L^2(R^n)$$

注意

$$\begin{aligned}
&(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\varphi u}(\xi)\\
&=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)d\eta\\
&=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\left[\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right]^{s/2}\hat{\varphi}(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{s/2}\hat{u}(\eta)d\eta
\end{aligned}\tag{4.1.15}$$

设

$$K(\xi,\ \eta)=\left[\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right]^{s/2}\hat{\varphi}(\xi-\eta)$$

由Peetre不等式，有

$$\begin{aligned}
|K(\xi,\ \eta)|&\leqslant 2^{|s|/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2}|\hat{\varphi}(\xi-\eta)|\\
&=2^{|s|/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{(|s|/2)+n}|\hat{\varphi}(\xi-\eta)|\cdot\\
&\quad(1+|\xi-\eta|^2)^{-n}\\
&\leqslant c(1+|\xi-\eta|^2)^{-n}
\end{aligned}\tag{4.1.16}$$

这里 $c=\sup\limits_{\xi-\eta\in R^n}\{2^{|s|/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{(|s|/2)+n}|\hat{\varphi}(\xi-\eta)|\}$. 这是因为 $\varphi\in\tilde{S}(R^n)$ 以及 Fourier 变换是从$\tilde{S}(R^n)$到$\tilde{S}(R^n)$的线性连续映射，从而$\hat{\varphi}\in\tilde{S}(R^n)$. 这时 $K(\xi,\ \eta)$ 满足引理 4.1.5 的条件，所以$(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\varphi u}(\xi)\in L^2(R^n)$.

下面证明 $\varphi u$ 关于 $\varphi\in\tilde{S}(R^n)$ 以及 $u\in H^s(R^n)$ 的连续性. 首先，容易证明 (4.1.14): $\|\varphi u\|_{s,\ R^n}\leqslant c\|u\|_{s,\ R^n}$，这说明 $\varphi u$ 关于 $u\in H^s(R^n)$ 是连续的. 另一方面，在$\tilde{S}(R^n)$ 内设 $\varphi_j\to 0$，以及

$$c_j=\sup_{\zeta\in R^n}\{(1+|\zeta|^2)^{(|s|/2)+n}|\hat{\varphi}_j(\zeta)|\}$$

则由(4.1.14)及引理4.1.5知

$$\|\varphi_j u\|_{s,\,\mathbb{R}^n} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\varphi_j u}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leqslant c_j c'\|u\|_{s,\,\mathbb{R}^n}$$

因为 $\varphi_j \to 0$，于是 $c_j \to 0$，从而 $\|\varphi_j u\|_{s,\,\mathbb{R}^n} \to 0$，这证明了 $\varphi u$ 关于 $\varphi \in \tilde{S}(\mathbb{R}^n)$ 是连续的．证毕．

**定理 4.1.6** 设三个实数 $s_1$，$s$，$s_2$ 满足 $s_1 < s < s_2$．则对于任意 $\varepsilon > 0$，存在常数 $c_\varepsilon$，使得 $\forall u \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|^2_{s,\,\mathbb{R}^n} \leqslant \varepsilon\|u\|^2_{s_2,\,\mathbb{R}^n} + c_\varepsilon\|u\|^2_{s_1,\,\mathbb{R}^n} \tag{4.1.17}$$

**证** 只须证明 $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ 有

$$(1+|\xi|^2)^s \leqslant \varepsilon(1+|\xi|^2)^{s_2} + c_\varepsilon(1+|\xi|^2)^{s_1}$$

其中$c_\varepsilon = \varepsilon^{-(s-s_1)/(s_2-s)}$.

即如记 $\rho = 1+|\xi|^2$，要证

$$\rho^s \leqslant \varepsilon\rho^{s_2} + \varepsilon^{-(s-s_1)/(s_2-s)}\rho^{s_1}$$

或

$$1 \leqslant \varepsilon\rho^{s_2-s} + \varepsilon^{-(s-s_1)/(s_2-s)}\rho^{s_1-s}$$

如果令$\lambda = \varepsilon^{1/(s_2-s)}$，则上式可写为

$$1 \leqslant (\lambda\rho)^{s_2-s} + (\lambda\rho)^{s_1-s} \tag{4.1.18}$$

如果$\lambda\rho \geqslant 1$，则由$s < s_2$，有

$$(\lambda\rho)^{s_2-s} \geqslant 1$$

如果$\lambda\rho \leqslant 1$，则由$s_1 < s$，有

$$(\lambda\rho)^{s_1-s} \geqslant 1$$

故 (4.1.18) 式成立．注意到范数 $\|\cdot\|_{s,\,\mathbb{R}^n}$ 的定义 (4.1.2)，即得本命题．证毕．

**定理 4.1.17** (Соболев 嵌入定理)如果有一非负整数 $k$，且有 $s \in \mathbb{R}$ 满足$s > n/2+k$，则$H^s(\mathbb{R}^n)$ 嵌入 $C_B^k(\mathbb{R}^n)$.

**证** 首先考虑$k=0$的情况.$\forall u \in H^s(\mathbb{R}^n)$，有

$$\hat{u}(\xi) = f(\xi)g(\xi)$$

$$f(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi) \quad g(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-s/2}$$

当 $s>n/2$ 时，容易证明 $g(\xi)\in L^2(R^n)$，而由 $H^s(R^n)$ 的定义知 $f(\xi)\in L^2(R^n)$. 从而由 Schwartz 不等式得:

$$\int|\hat{u}(\xi)|d\xi\leqslant c_s\|u\|_{s,R^n}\qquad\forall\hat{u}(\xi)\in L^1(R^n)$$

其中 $c_s^2=\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi$. 由 Fourier 变换的性质易知，如果 $g\in L^1(R^n)$，则 $\hat{g}(\xi)$ 是 $\xi\in R$ 的连续函数. 故 $\hat{\hat{u}}(x)$ 是 $x$ 的连续函数，而由 Fourier 变换反演公式知 $\hat{\hat{u}}(x)=u(-x)$，从而 $u\in C_B^0(R^n)$，且

$$\sup_{x\in R^n}|u(x)|\leqslant\int_{R^n}|\hat{u}(\xi)|d\xi\leqslant c_s\|u\|_{s,R^n}$$

当 $k\neq 0$ 时，设 $|\alpha|\leqslant k$，$u\in H^s(R^n)$，由定义易知 $\partial^\alpha u\in H^{s-|\alpha|}$. 因为 $s-|\alpha|\geqslant s-k>n/2$，由已证的第一部分知 $\partial^\alpha u\in C_B^0$，$\forall|\alpha|\leqslant k$，从而命题得证. 证毕.

**定理 4.1.8** (Reillich – Кондрашев 定理) 设 $s$，$t\in R$ 且满足 $s>t$，且如 $\Omega$ 是 $R^n$ 中列紧集合，则

$$H_\Omega^s(R^n)\text{紧嵌入}H_\Omega^t(R^n)$$

这里空间 $H_\Omega^s(R^n)=\{u\in H^s(R^n):\ \text{supp}\quad u\subset\Omega\}$.

**证** 设 $\{u_k\}$ 是 $H_\Omega^s(R^n)$ 中的有界序列，不妨设 $\|u_k\|_{s,R^n}\leqslant 1$. 现在证明可以从 $\{u_k\}$ 中选出一个在 $H^t(R^n)$ 中收敛的子序列. 设有 $\varphi\in C_0^\infty(R^n)$，它在 $\Omega$ 的邻域中等于 1. $\forall u\in H_\Omega^s(R^n)$，有

$$u=\varphi u,\quad\hat{u}=(2\pi)^{-n}\hat{\varphi}*\hat{u},\quad\partial^\alpha\hat{u}=(2\pi)^{-n}\partial^\alpha\hat{\varphi}*\hat{u}$$

由引理4.1.4 (Peetre不等式)有

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}|\partial^\alpha\hat{u}(\xi)|\leqslant(f*g_\alpha)(\xi)$$

其中

$$f(\xi) = (2\pi)^{-n/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{u}(\xi)|$$

$$g_\alpha(\xi) = (2\pi)^{-n/2}2^{|\alpha|/2}(1+|\xi|^2)^{|\alpha|/2}|\partial^\alpha\hat{\varphi}(\xi)|$$

以及存在一个常数$c_\alpha$使得$\forall u \in H^s_{\Omega}(\mathbf{R}^n)$以及$\forall \xi \in (\mathbf{R}^n)$有

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}|\partial^\alpha\hat{u}(\xi)| \leqslant c_\alpha\|u\|_{s,\mathbf{R}^n}$$

从而对上面给出的序列$\{u_k\}$，有

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}|\partial^\alpha\hat{u}_k(\xi)| \leqslant c_\alpha$$

对$\mathbf{R}^n$中任一列紧集$\Omega$和$\xi \in \mathbf{R}^n$成立．这表明$\{\partial^\alpha\hat{u}_k\}_\Omega$在$\mathbf{R}^n$中的任一列紧集$\Omega$上是一致有界的．$\forall|\alpha| \leqslant 1$，$\alpha \in z^n_+$，由Ascoli－Arzela定理知，可以从序列$\{\hat{u}_k\}$中选出一个子序列，仍记为$\hat{u}_k$，使得下述结论$A$成立：

$\{\hat{u}_k\}$在$\mathbf{R}^n$的任一列紧集$\Omega$上一致收敛．

由结论$A$出发，下面推导子序列$\{u_k\}$在$H^t(\mathbf{R}^n)$中收敛．设$R>0$，记$\|u_k-u_l\|^2_{t,\mathbf{R}^n}=I_1+I_2$，其中

$$I_1 = \int_{|\xi|<R}(1+|\xi|^2)^t|\hat{u}_k(\xi)-\hat{u}_l(\xi)|^2 d\xi$$

$$I_2 = \int_{|\xi|\geqslant R}(1+|\xi|^2)^t|\hat{u}_k(\xi)-\hat{u}_l(\xi)|^2 d\xi$$

把$I_2$记为

$$I_2 = \int_{|\xi|\geqslant R}(1+|\xi|^2)^{t-s}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}_k(\xi)-\hat{u}_l(\xi)|^2 d\xi$$

因为$t-s<0$，有

$$I_2 \leqslant (1+R^2)^{t-s}\int_{|\xi|\geqslant R}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}_k(\xi)-\hat{u}_l(\xi)|^2 d\xi$$

$$\leqslant (1+R^2)^{t-s}\|u_k-u_l\|^2_{s,\mathbf{R}^n} \leqslant 4(1+R^2)^{t-s}$$

则如果$R$充分大时，$I_2$可以任意小．另一方面，对于这样固定的$R$，由结论$A$知，如$k$和$l$充分大时，$I_1$可以任意小．从而子序列$\{u_k\}$在$H^t(\mathbf{R}^n)$中收敛．证毕．

**定理 4.1.9** 设 $s>t$, $s$, $t\in\mathbf{R}$, $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是有界开集，若 $\mathbf{H}_0^s(\Omega)$ 是 $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ 在空间 $\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$ 中的闭包，则

$$\mathbf{H}_0^s(\Omega)\text{紧嵌入}\mathbf{H}^t(\mathbf{R}^n)$$

证明与定理 4.1.8 的类似.

下面给出 $\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$ 中函数的逼近性质，它在一些定理的构造性证明中很有用.

**定理 4.1.10** 设 $\alpha(x)\in\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ 满足 $\int_{\mathbf{R}^n}\alpha(x)dx=1$. 又 $\chi\in\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ 满足在原点的邻域中 $\chi=1$. 对于任意正整数 $k$，置

$$\omega_k(x)=k^n\alpha(kx) \tag{4.1.19}$$

$$\chi_k(x)=\chi\left(\frac{x}{k}\right) \tag{4.1.20}$$

则 $\forall s\in\mathbf{R}$, $\forall u\in\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$ 有

$$\lim_{k\to\infty}\|\omega_k*u-u\|_{s,\mathbf{R}^n}=0 \tag{4.1.21}$$

$$\lim_{k\to\infty}\|\chi_k u-u\|_{s,\mathbf{R}^n}=0 \tag{4.1.22}$$

**证** 由 (4.1.19)，有 $\hat{\omega}_k(\xi)=\hat{\omega}(\xi/k)$，以及 $\widehat{\omega_k*u}(\xi)=\hat{\omega}(\xi/k)\hat{u}(\xi)$，则

$$\|\omega_k*u-u\|_{s,\mathbf{R}^n}^2=\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2|\hat{\omega}(\xi/k)-1|^2d\xi$$

又因为 $k\to+\infty$ 时，$\hat{\omega}(\xi/k)\to\hat{\omega}(0)=1$ 以及 $|\hat{\omega}(\xi/k)-1|\leqslant|\hat{\omega}(\xi/k)|+1\leqslant 2$，故由 Lebesgue 控制收敛定理，(4.1.21) 成立. 由定 4.1.15，有

$$\|\chi_k u\|_{s,\mathbf{R}^n}\leqslant c_k\|u\|_{s,\mathbf{R}^n}$$

其中 $$c_k=2^{|s|/2}\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^{|s|/2}k^n|\hat{\chi}(k\xi)|d\xi$$

$$= 2^{|\alpha|/2}\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi/k|^2)^{|\alpha|/2}|\hat{\chi}(\xi)|d\xi < c_1$$

这里$c_1$是与$u$无关的常数. 从而有$\forall k$, $u\in \mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$

$$\|\chi_k u\|_{s,\mathbf{R}^n} \leqslant C_1\|u\|_{s,\mathbf{R}^n} \tag{4.1.23}$$

对于任给的$\varepsilon>0$, 因为$\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$在$\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$中稠密, 所以存在$\varphi\in\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$使得$\|u-\varphi\|_{s,\mathbf{R}^n}<\varepsilon$. 又对充分大的$k$, $\chi_k\varphi=\varphi$, 从而由截断函数$\chi_k$的定义, 易知

$$\|\chi_k u-u\|_{s,\mathbf{R}^n}=\|\chi_k(u-\varphi)-(u-\varphi)\|_{s,\mathbf{R}^n}<C_1\varepsilon$$

从而(4.1.22)得证.证毕.

**定理 4.1.11** Dirac 测度$\delta\in\mathbf{H}^{-n/2-\varepsilon}(\mathbf{R}^n)$, 其中$\varepsilon>0$是一个实数. 除非恒为零的广义函数, 没有一个支集是有限个点集的广义函数属于$\mathbf{H}^{-n/2}(\mathbf{R}^n)$.

**证** 因为$\delta$的 Fourier 变换是 1, 而$(1+|\xi|^2)^{s/2}\in\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$当且仅当$s<-n/2$, 如此就证明了第一个论断.

设$u\in\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$有一个仅包含有限个点集的支集, 那么存在一个$\varphi\in\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$使得$\varphi u$不恒为零, 但是$\mathrm{supp}(\varphi u)$仅仅包含一个点, 由于$\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)$对于仿射变换是不变的, 故可以假设$\mathrm{supp}(\varphi u)$是原点, 但是所有支集在原点的广义函数都是形如$P(D)\delta$的, 这里$P(\xi)$是一个多项式$D=(D_1, D_2, \cdots, D_n)$, $D_j=-\sqrt{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $P(D)\delta$的 Fourier 变换是$P(\xi)$, 设$P$是$m$次多项式, 那么$(1+|\xi|^2)^{s/2}P(\xi)\in\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$当且仅当$s+m<-n/2$, 从而证明了定理的后半部分. 证毕.

## § 4.2 $\mathbf{H}^s(\Omega)(s\in\mathbf{R})$的定义及性质

设$\Omega\subset\mathbf{R}^n$是$\mathbf{C}^m$型区域以及$s\in\mathbf{R}$, 定义限制算子$\gamma$为: $\forall u\in\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n), \gamma u=u|_\Omega$. 限制算子$\gamma$的核空间$\mathrm{Ker}(\gamma)$是

$H^s(R^n)$ 的闭子空间 $H^s_{R^n\setminus\Omega}(R^n)=\{u\in H^s(R^n),$

$\mathrm{supp}\ u\subset R^n\setminus\Omega\}$，即由 $H^s(R^n)$ 中在 $\Omega$ 上值为 0 的函数全体构成的子空间．从而我们有一个 $H^s(R^n)/H^s_{R^n\setminus\Omega}(R^n)$ 到 $\gamma$ 的值域 $R(\gamma)$ 的同构．这里 $H^s(R^n)/H^s_{R^n\setminus\Omega}(R^n)$ 是商空间．从而有

**定义 4.2.1** 设 $\Omega\subset R^n$ 是 $C^m$ 型区域以及 $s\in R$，则 $H^s(\Omega)=\{u\in D'(\Omega)$：存在$\tilde{u}\in H^s(R^n)$ 使得 $\gamma\tilde{u}=u\}$，装备范数

$$\|u\|_{s,\Omega}=\inf\|\tilde{u}\|_{s,R^n} \tag{4.2.1}$$

这里下确界是在 $H^s(R^n)$ 中那些满足 $\gamma\tilde{u}=u$ 的函数类$\tilde{u}$ 中取的．范数 (4.2.1) 恰是商范数．

我们先考虑 $H^s(\Omega)$ 是否为 Banach 空间．为此讨论子空间

$$\begin{aligned}H^s_{R^n\setminus\Omega}(R^n)&=\{u\in H^s(R^n):\ \mathrm{supp}\ u\subset R^n\setminus\Omega\}\\&=\{u\in H^s(R^n):\ \gamma u=u|_\Omega=0\}\end{aligned}$$

**引理4.2.1** $H^s_{R^n\setminus\Omega}(R^n)$是Banach空间

**证** 设$\{u_n\}$ 是 $H^s_{R^n\setminus\Omega}(R^n)$ 中任一基本序列，由 $H^s(R^n)$ 的完备性，有 $u\in H^s(R^n)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{s,R^n}=0$$

又$\|u_n-u\|_{s,\Omega}\leqslant\|u_n-u\|_{s,R^n}$以及$\gamma u_n=0$，则$\gamma u=0$.即 $u\in H^s_{R^n\setminus\Omega}(R^n)$.证毕.

因为$H^s(R^n)$是Banach空间，由商空间的性质易知

**定理 4.2.1** $H^s(\Omega)$ 是 Banach 空间．

容易从 $H^s(R^n)$ 的性质（对偶空间结构及嵌入性质等）得出 $H^s(\Omega)$ 相应的性质．例如

**定理 4.2.2** 设 $s\in R$，则 $C^\infty_0(\Omega)$ 嵌入 $H^s(\Omega)$ 而且 $C^\infty_0(\Omega)$ 在 $H^s(\Omega)$ 中是稠密的．又如 $s$，$t\in R$ 且 $s>t$ 以及 $\Omega$ 是紧的，则 $H^s(\Omega)$ 紧嵌入 $H^t(\Omega)$.

**证** 对于 $C^\infty_0(\Omega)$ 嵌入 $H^s(\Omega)$，可以考虑算子 $\gamma$，$i$，$\rho$，

这里

$\rho$: $C_0^\infty(\Omega)\to C_0^\infty(R^n)$是一个线性连续延拓算子；

$i$: $C_0^\infty(R^n)\to H^s(R^n)$是一个内射；

$\gamma$: $H^s(R^n)\to H^s(\Omega)$是一个限制算子.

由定理 4.1.2 知 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^s(R^n)$ 中稠密，因此 $i$ 是连续的．由定义 4.2.1 知限制算子 $\gamma\in L(H^s(R^n),\ H^s(\Omega))$，故 $\gamma$．$i$．$\rho$ 是从 $C_0^\infty(\Omega)\to H^s(\Omega)$ 的线性连续映照，从而有 $C_0^\infty(\Omega)$ 嵌入 $H^s(\Omega)$.

对于$H^s(\Omega)$紧嵌入$H^t(\Omega)$，考虑算子$\gamma$．$j$．$\chi\rho_s$，这里

$\rho_s$:$H^s(\Omega)\to H^s(R^n)$是连续线性延拓算子；

$\chi\in C_0^\infty(R^n)$是截断函数，即在$\Omega$的邻域上，$\chi=1$；

$j$: $H_K^s(R^n)\to H^t(R^n)$是嵌入算子，$K=\text{supp}\ \chi$；

$\gamma$: $H^t(R^n)\to H^t(\Omega)$是限制算子.

因为 $s>t$，故由定理 4.1.8 知 $j$ 是紧嵌入算子，因此算子$\gamma$．$j$．$\chi\rho_s$ 是由 $H^s(\Omega)$ 到 $H^t(\Omega)$ 的紧嵌入算子．

最后，$\forall u\in H^s(\Omega)$，有$\tilde{u}=\rho_s u\in H^s(R^n)$，由定理 4.1.2 知存在序列$\{\varphi_k\}\subset C_0^\infty(\Omega)$ 使得 $\|\varphi_k-\tilde{u}\|_{s,R^n}\to 0$，当 $k\to\infty$ 时．由此有 $\|\gamma(\varphi_k-\tilde{u})\|_{s,\Omega}=\|\gamma\varphi_k-u\|_{s,\Omega}\to 0$，当 $k\to\infty$ 时．因此 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^s(\Omega)$ 中稠密．证毕．

引理 4.2.2　$\forall u\in H^s(R^n)$，$v\in H^{-s}_{\overline{R^n}\setminus\Omega}(R^n)$，则 $<u,\ v>=0$.

证　由局部坐标和单位分解，我们可以化归为 $\Omega=R^n_+$ 的情况讨论，$u$ 具有列紧支集．设我们有一正则化函数序列 $\omega_k$(见定理 4.1.10) 满足 $\text{supp}\ \omega\subset\{x_n<0\}$. 且有 $\|\omega_k*u-u\|_{s,R^n}\to 0$，当 $k\to\infty$ 时．故 $<u,\ v>=\lim<\omega_k*u,\ v>=0$，因为 $v$ 在 $\omega_k*u$ 的支集的邻域中为 0. 证毕．

容易从 $H^s(R^n)$ 的嵌入结果推广到 $H^s(\Omega)$ 的情况．

**定理4.2.3** $\forall s\in \mathbf{R}$,

(1) 若$s \geqslant n/2$, 则 $\mathbf{H}^s(\Omega)$嵌入$\mathbf{C}_B^0(\Omega)$ (4.2.2)

(2) 若$s \geqslant n/2+l$, 则 $\mathbf{H}^s(\Omega)$嵌入$\mathbf{C}_B^l(\Omega)$ (4.2.3)

(3) 若$s < n/2$, 则 $\mathbf{H}^s(\Omega)$嵌入$\mathbf{L}^p(\Omega)$ (4.2.4)

这里$1/p=1/2-s/n$

下面考察$\mathbf{H}_0^s(\Omega)$,

**定义4.2.2** $\mathbf{H}_0^s(\Omega)$是$\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$在空间$\mathbf{H}^s(\Omega)$范数下的闭包.

由此容易得出

**定理4.2.4**

(1) $(\mathbf{H}_0^s(\Omega))'=\mathbf{H}^{-s}(\Omega)$.

(2) 如果$\Omega$有界, $\partial\Omega$充分光滑, 则$\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$在$\mathbf{H}^s(\Omega)$中稠密(即$\mathbf{H}_0^s(\Omega)=\mathbf{H}^s(\Omega)$)的充分必要条件是$s\leqslant 1/2$.

(3) 当$s>1/2$时, $\mathbf{H}_0^s(\Omega)$是$\mathbf{H}^s(\Omega)$的真子空间.

对于任意实数$s$, 除了从商范数来定义$\mathbf{H}^s(\Omega)$外, 我们还可以利用等价范数(4.1.4)来定义.

设 $s=m+\sigma=[s]+\sigma$, 其中$0\leqslant\sigma<1$, 引入记号

$$N_m(u)=\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|\partial^\alpha u(x)-\partial^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}dxdy \qquad 1\leqslant p<\infty \tag{4.2.5}$$

$$N_m(u)=\max_{|\alpha|=m}\operatorname*{ess\,sup}_{x,y\in\Omega,\ x\neq y}\frac{|\partial^\alpha u(x)-\partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^\sigma} \qquad p=\infty \tag{4.2.6}$$

我们给出

**定义4.2.3** $\forall s\in\mathbf{R}^n$, $s=m+\sigma$, $0\leqslant\sigma<1$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$

$\mathbf{W}^{s,p}(\Omega)=\{u:\ u\in\mathbf{D}'(\Omega),\ u\in\mathbf{W}^{m,p}(\Omega),\ N_m(u)<+\infty\}$,

其中装备范数

$$\|u\|_{s,p,\Omega}^p=\|u\|_{m,p,\Omega}^p+N_m(u) \qquad \forall u\in\mathbf{W}^{s,p}(\Omega) \tag{4.2.7}$$

同样, 可以定义

$W_0^{s,p}(\Omega)=\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ 在空间$W^{s,p}(\Omega)$范数下的闭包$(s>0)$.

$W^{-s,p'}(\Omega)=(W^{s,p}(\Omega))'$，其中$1/p+1/p'=1$

和第三章一样，$W^{s,2}(\Omega)$和$H^s(\Omega)$有如下关系

定理4.2.5

(1) $W^{s,p}(\Omega)$，$s\in R$，$1\leqslant p\leqslant+\infty$，是Banach空间.

(2) 如果$\Omega\subset R^n$是L型区域，则在代数和拓扑意义下，有$W^{s,2}(\Omega)=H^s(\Omega)$.

此外，单参数 Соболсв 族$H^s(\Omega)$，$s\in R$还具有下列插入性质

**定理 4.2.6** 设$\theta\in[0,1]$，$s_i$，$t_i(i=1，2)$是两对实数，$0\leqslant t_i\leqslant s_i$，$L_i$和$L_\theta$分别表示算子族$L(H^{s_i}(\Omega);\ H^{t_i}(\Omega))$和 $L\ (H^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(\Omega)，H^{(1-\theta)t_1+\theta t_2}(\Omega))$．如果算子$\Pi\in L_1\bigcap L_2$；则$\Pi\in L_\theta$而且存在常数$c$，使得

$$\|\Pi\|_{L_\theta}\leqslant c\|\Pi\|_{L_1}^{1-\theta}\cdot\|\Pi\|_{L_2}^{\theta}$$

## §4.3 Bochner 积分

我们将会看到，混合问题具有 Cauchy 问题和边值问题的双重特征，正像 Canchy 问题一样，我们要研究 n+1 个变量的函数，即 n 个空间变量，一个时间变量.从而我们必须考察圆柱体$\Omega\times(0，T)$上的函数和广义函数，其中$\Omega$是$R^n$中的一个开集，T是一个正数.为了方便起见，我们把(x，t)的函数视为自变量为t，在x的函数空间中取值的函数.

设X是 Banach 空间，$I\subset R$，定义在I上的抽象函数z(t)是一个映照，它把I上的每一个t映为X中某一元素，称I是z(t)的定义域，X为值域.

由于X是拓扑向量空间，故$z(t)$有连续、可微的定义．例如，$z(t)$在$t_0$处一次可微，是指差商

$\lim\limits_{h\to 0}\Delta_h z(t_0)=\lim\limits_{h\to 0}h^{-1}\{z(t_0+h)-z(t_0)\}$ 在 X 的拓扑下是收敛的．如果 $z(t)\in C^m(I)$，是指 $z(t)$ 在 I 上 $m$ 次连续可微．

设 X′ 是 X 的对偶空间，在 X 的弱拓扑下，导致弱连续、弱连续可微的概念．例如，如 $\forall z^*\in X'$，$t\to\langle z^*, z(t)\rangle$ 是连续的，则称 $z(t)$ 是弱连续．

为了定义抽象函数的积分，我们先定义简单函数．设 $I_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 I 中可测集，$I_i\bigcap I_j=0$，$(i\neq j)$，每一个 $I_i$ 的 Lebesgue 测度 $\mu(I_i)$ 是有限的．用 $\chi_i(t)$ 表示 $I_i$ 上的特征函数，$b_i\in X$，$(1\leqslant i\leqslant n)$．则称抽象函数

$$z(t)=\sum_{i=1}^{n}\chi_i(t)b_i \tag{4.3.1}$$

为简单函数．

**定义 4.3.1** 称抽象函数 $z(t)$ 在 I 上强可测，如果存在简单函数序列 $\{z_n(t)\}$，在 I 中有

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n(t)-z(t)\|_X=0 \qquad a.e. \tag{4.3.2}$$

**定义 4.3.2** 如果 I 上的简单函数 $z(t)$ 由 (4.3.1) 确定，则 $z(t)$ 的 Bochner 积分定义为

$$\int_I z(t)dt=\sum_{i=1}^{n}b_i\mu(I_i) \tag{4.3.3}$$

由(4.3.3)，容易得出

**引理 4.3.1** 设 $z(t)$ 是定义在 I 上的简单函数，则

$$\left\|\int_I z(t)dt\right\|_X\leqslant\int_I\|z(t)\|_X dt \tag{4.3.4}$$

**引理 4.3.2** 设 $y(t)$，$z(t)$ 是两个简单函数，$\alpha$ 和 $\beta$ 是实数，则 $\alpha y(t)+\beta z(t)$ 也是简单函数，且

$$\int_I (\alpha y(t) + \beta z(t))dt = \alpha\int_I y(t)dt + \beta\int_I z(t)dt \tag{4.3.5}$$

定义 4.3.3　称抽象函数 $z(t)$ 在 I 上 Bochner 可积，如果存在简单函数序列 $\{z_n(t)\}$，满足 (4.3.2) 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \|z_n(t) - z(t)\|_X dt = 0 \tag{4.3.6}$$

如果 $z(t)$ 在 I 上 Bochner 可积，则其 Bochner 积分定义为

$$\int_I z(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_I z_n(t)dt \tag{4.3.7}$$

为了说明定义 4.3.3 的合理性，必须验证 (4.3.7) 的右端极限存在，且不依赖于 $\{z_n(t)\}$ 的选择．由不等式 (4.3.4) 得

$$\left\|\int_I z_m(t)dt - \int_I z_n(t)dt\right\|_X \leqslant \int_I \|z_m(t) - z_n(t)\|_X dt$$

$$\leqslant \int_I \|z_m(t) - z(t)\|_X dt + \int_I \|z_n(t) - z(t)\|_X dt$$

因此，$\left\{\int_I z_n(t)dt\right\}$ 是 X 中的基本序列．由 X 的完备性知它的极限存在．另外，如果 $\{y_n(t)\}$ 和 $\{z_n(t)\}$ 是满足 (4.3.2) 和 (4.3.6) 的两个简单函数序列，则

$$\left\|\int_I y_n(t)dt - \int_I z_n(t)dt\right\|_X \leqslant \int_I \|y_n(t) - z_n(t)\|_X dt$$

$$\leqslant \int_I \|y_n(t) - z(t)\|_X dt + \int_I \|z_n(t) - z(t)\|_X dt$$

即，$\left\{\int_I y_n(t)dt\right\}$ 和 $\left\{\int_I z_n(t)dt\right\}$ 有同一个极限，亦即抽象函数 $z(t)$ 的 Bochner 积分不依赖于 $\{z_n(t)\}$ 的选择．

**定理 4.3.1** 强可测函数 $z(t)$ 在 I 上 Bochner 可积的充要条件是 $\|z(t)\|_X \in L^1(I)$.

**证** 必要性：设 $\{z_n(t)\}$ 是满足 (4.3.2) 和 (4.3.6) 的简单函数序列，由不等式

$$\|z(t)\|_X \leqslant \|z_n(t)-z(t)\|_X + \|z_n(t)\|_X$$

和(4.3.6)推出 $$\|z(t)\|_X \in L^1(I) \tag{4.3.8}$$

充分性：由于 $z(t)$ 是强可测的，故存在简单函数序列 $\{z_n(t)\}$，满足 (4.3.2)，从而在 I 中除去零测集 $\tilde{I}$ 外，有

$$\lim \|z_n(t)\|_X = \|z(t)\|_X \qquad \forall t \in I \setminus \tilde{I}$$

作简单函数序列 $\{y_n(t)\}$ 如下

$$y_n(t)=\begin{cases} z_n(t), & \text{当 } \|z_n(t)\|_X < 2\|z(t)\|_X \text{ 时} \\ 0\ , & \text{当 } \|z_n(t)\|_X \geqslant 2\|z(t)\|_X \text{ 时} \end{cases}$$

显然成立 $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n(t)-z(t)\|_X = 0$，$\forall t \in I \setminus \tilde{I}$ 和

$\|y_n(t)-z(t)\|_X \leqslant 3\|z(t)\|_X$，由Lebesgue控制定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \|y_n(t)-z(t)\|_X dt = \int_I \lim_{n\to\infty}\|y_n(t)-z(t)\|_X dt = 0$$

因此，简单函数序列 $\{y_n(t)\}$ 满足 (4.3.2) 和 (4.3.6)，从而 $z(t)$ 是 Bochner 可积．证毕．

**定理4.3.2** 如果 $z(t)$ 在I上Bochner可积，则

$$\left\|\int_I z(t)dt\right\|_X \leqslant \int_I \|z(t)\|_X dt \tag{4.3.9}$$

**证** 如果 $z(t)$ 是简单函数，那么 (4.3.9) 就是 (4.3.4). 否则，存在简单函数序列 $\{z_n(t)\}$ 满足 (4.3.2) 和 (4.3.6). 设 $z_n(t)$ 是简单函数序列 $\{z_n(t)\}$ 中任一元素，则有

$$\left\|\int_I z(t)dt\right\|_X \leqslant \left\|\int_I (z(t)-z_n(t))dt\right\|_X + \left\|\int_I z_n(t)dt\right\|_X$$

$$\leqslant \left\| \int_I (z(t) - z_n(t))dt \right\|_X + \int_I \|z_n(t)\|_X dt$$

$$\leqslant \left\| \int_I (z(t) - z_n(t))dt \right\|_X + \int_I \|z_n(t) - z(t)\|_X dt$$

$$+ \int_I \|z(t)\|_X dt$$

当 $n \to \infty$ 时，由 $z(t)$ 的 Bochner 可积得上式右边第一项趋近于零．由 (4.3.6) 得右边第二项也趋于零，左边与 $n$ 无关，由此得 (4.4.9). 证毕．

**定义 4.3.4** 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，$z(t)$ 是一强可测函数，I 是其定义域，值域在 X 中，且满足

$$\int_I \|z(t)\|_X^p dt < +\infty$$

一切这样函数的全体组成空间 $L^p(\mathrm{I};\ \mathrm{X})$，并赋以范数

$$\|z(t)\|_{L^p(\mathrm{I},\ \mathrm{X})} = \left[ \int_I \|z(t)\|_X^p dt \right]^{1/p} \qquad (4.3.10)$$

当 $p = \infty$ 时，定义4.3.4可改写为

$$\|z(t)\|_{L^\infty(\mathrm{I};\ \mathrm{X})} = \operatorname*{css\ sup}_{t \in I} \|z(t)\|_X < +\infty \qquad (4.3.11)$$

这样 $L^p(\mathrm{I};\ \mathrm{X})(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 是线性赋范空间.

用 $C(\bar{\mathrm{I}};\ \mathrm{X})$ 表示连续函数 $z$：$\bar{\mathrm{I}} \to \mathrm{X}$，其范数为

$$\|z\|_{C(\bar{\mathrm{I}};\ \mathrm{X})} = \max_{t \in \bar{\mathrm{I}}} \|z(t)\|_X \qquad (4.3.12)$$

与前面类似，设 $\mathrm{I} = (a,\ b)$，如果对任意满足 $a < c < d < b$ 的区间 $(c,\ d)$，$z(t) \in L^1((c,\ d);\ X)$，则称 $z(t)$ 为局部可积．这样函数的全体组成的集合为 $L^1_{loc}((c,\ d);\ \mathrm{X})$. 空间 $L^2(\mathrm{I};\ L^2(\mathrm{R}^{n-1}))$ 中任何元素均属于 $L^1_{loc}(\mathrm{I};\ L^2(\mathrm{R}^{n-1}))$.

现在我们给出这类函数广义导数的概念.

引理 4.3.3 设 X 是 Banach 空间，其对偶空间为 $X'$，设 $z\in L^1(a, b; X)$，$g\in L^1(a, b; X)$，则下列条件是等价的

(1) 对任意一个$\xi\in X$，$z$满足

$$z(t)=\xi+\int_a^t g(s)ds, \quad a.e. \quad \forall t\in(a, b) \tag{4.3.13}$$

(2) $\forall\varphi\in D((a, b))$，有

$$\int_a^b z(t)\varphi'(t)ds=-\int_a^b g(t)\varphi(t)ds \tag{4.3.14}$$

(3) $\forall\eta\in X'$，在$D'((a, b))$中，$z$满足

$$\frac{d}{dt}<z, \eta>_X=<g, \eta>_X \tag{4.3.15}$$

如果上述 (1)—(3) 成立，则 $z$ 与 $C([a, b]; X)$ 中的一个函数几乎处处相等.

证 为方便起见，设$[a, b]=[0, T]$.由古典的分部积分(1)可得到(2)和(3).剩下的是检验由(3)到(2)以及由(2)到(1)的性质.

如果(3)成立，且$\varphi\in D((0, T))$，则由定义有

$$\int_0^T <z(t), \eta>\varphi'(t)dt=-\int_0^T <g(t), \eta>\varphi(t)dt \tag{4.3.16}$$

或

$$<\int_0^T z(t)\varphi'(t)dt+\int_0^T g(t)\varphi(t)dt, \eta>=0 \quad \forall\eta\in X'$$

从而(2)式成立.

以下证明 (2) 到 (1). 我们可以将一般情况转化为 $g=0$ 的情况. 为此，设 $v=z-z_0$，这里

$$z_0(t)=\int_0^t g(s)ds \tag{4.3.17}$$

虽然，$z_0(t)$ 是绝对连续的，而且 $z_0' = g$，从而用 $z_0 + v$ 代替 $z$ 后，(4.3.14) 成立以及

$$\int_0^T v(t)\varphi'(t)dt = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathbf{D}((0,\ T)) \tag{4.3.18}$$

如果可以由 (4.3.18) 证得 $v$ 是 $\mathbf{X}$ 中的常数元素，则完成了 (1) 的证明．与 § 3.1 中的例子所用方法类似，设 $\varphi_0$ 是 $\mathbf{D}((0,\ T))$ 中某个元素，使得

$$\int_0^T \varphi_0(t)dt = 1$$

则$\mathbf{D}((0,\ T))$中任一元素$\varphi$都可写为

$$\varphi = \lambda\varphi_0 + \psi',\quad \lambda = \int_0^T \varphi(t)dt,\quad \psi \in \mathbf{D}((0,\ T)) \tag{4.3.19}$$

事实上，因为 $\int_0^T (\varphi(t) - \lambda\varphi_0(t))dt = 0$，$\varphi - \lambda\varphi_0$ 在原点为零的原函数属于 $\mathbf{D}((0,\ T))$，而 $\psi$ 恰好是这个原函数．根据 (4.3.18) 以及 (4.3.19) 有

$$\int_0^T (v(t) - \xi)\varphi(t)dt = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathbf{D}((0,\ T)) \tag{4.3.20}$$

这里 $\xi = \int_0^T v(s)\varphi_0(s)ds.$

为了完成 (1) 的证明，还需证明由 (4.3.20) 可得 $v(t) = \xi$. a.e.，即使得

$$\int_0^T w(t)\varphi(t)dt = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathbf{D}((0,\ T))$$

成立的 $w \in \mathbf{L}^1(\mathbf{X})$ 几乎处处为零．以下用正则化方法来证明这个结论．

设 $\tilde{w}=\begin{cases} w(t) & \forall t\in[0,\ T] \\ 0 & \forall t\overline{\in}[0,\ T] \end{cases}$

又$\{\omega_\varepsilon\}$是一正则化序列，则对足够小的$\varepsilon>0$，$\forall\varphi\in \mathrm{D}((0,T))$，$\omega_\varepsilon*\varphi\in \mathrm{D}((0,\ T))$，以及

$$\int_0^T w(t)(\omega_\varepsilon*\varphi)(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{w}(t)(\omega_\varepsilon*\varphi)(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\omega_\varepsilon*\tilde{w})(t)\varphi(t)dt=0$$

因此，对任意固定的$\eta>0$，$\omega_\varepsilon*\tilde{w}$在区间$[\eta,\ T-\eta]$上等于零，当$\varepsilon\to 0$时，在$\mathrm{L}^1(-\infty,\ \infty,\ X)$中$\omega_\varepsilon*\tilde{w}$收敛于$\tilde{w}$，从而在$[\eta,\ T-\eta]$上，$w$是零．又$\eta>0$是任意地小，所以在整个区间$[0,\ T]$上$w$为零．证毕．

引理 4.3.3 隐含了下述定义

**定义 4.3.5** 引理 4.3.3 中的$g$称为$z$的弱或广义导数，并记为 $g=z'=\dfrac{dz}{zt}$.

显然，这个定义可以延拓到更高阶导数.

用$\mathrm{B}(\mathrm{R},\ \mathrm{H}^m(\mathrm{R}^{n-1}))$表示由满足下列条件的抽象函数$z(t)$组成的集合：

(1) $z(t)$在R上连续，即对任意$t$和实数$h$，有

$$\lim_{h\to 0}\|z(t+h)-Z(t)\|_{m,\ \mathrm{R}^{n-1}}=0$$

(2) 存在常数$c$，使得

$$\|z(t)\|_{m,\ \mathrm{R}^{n-1}}\leqslant c \qquad \forall t\in\mathrm{R}$$

(3) $\lim\limits_{t\to\infty}\|z(t)\|_{m,\ \mathrm{R}^{n-1}}=0$

**定理 4.3.3** 设$z(t)\in L^1(\mathrm{R},\ \mathrm{H}^m(\mathrm{R}^{n-1}))$，则抽象函数

$$\hat{z}(\xi)=\int_{\mathbf{R}} z(t)e^{-it\xi}dt \tag{4.3.21}$$

属于 $B(\mathrm{R},\ \mathrm{H}^m(\mathrm{R}^{n-1}))$.

**证** 对于固定的 $\xi$，$z(t)e^{-it\xi}\in L^1(\mathrm{R},\ \mathrm{H}^m(\mathrm{R}^{n-1}))$，因此(4.3.21)右端 Bochner 积分存在．根据 $B(\mathrm{R},\ \mathrm{H}^m(\mathrm{R}^{n-1}))$ 的定义，我们首先检验$\hat{z}(\xi)$的连续性，由

$$\hat{z}(\xi+h)-\hat{z}(\xi)=\int_{\mathbf{R}} z(t)(e^{-it(\xi+h)}-e^{-it\xi})dt$$

并利用定理4.3.2，得

$$\|\hat{z}(\xi+h)-\hat{z}(\xi)\|_{m,\ \mathrm{R}^{n-1}}\leqslant\int_{\mathbf{R}}\|z(t)\|_{m,\ \mathrm{R}^{n-1}}|e^{-ith}-1|dt$$

$$\leqslant 2\int_{\mathbf{R}}\|z(t)\|_{m,\ \mathrm{R}^{n-1}}\cdot\left|\sin\frac{th}{2}\right|dt$$

$$\leqslant 2\int_{|t|>M}\|z(t)\|_{m,\ \mathrm{R}^{n-1}}dt$$

$$+2\int_{|t|\leqslant M}\|z(t)\|_{m,\ \mathrm{R}^{n-1}}\cdot\left|\sin\frac{th}{2}\right|dt$$

由此得 $\lim\limits_{h\to 0}\|\hat{z}(\xi+h)-\hat{z}(\xi)\|_{m,\ \mathrm{R}^{n-1}}=0.$

其次，验证有界性.由(4.3.21)易得

$$\|\hat{z}(\xi)\|_{m,\ \mathrm{R}^{n-1}}\leqslant\int_{\mathbf{R}}\|z(t)\|_{m,\ \mathrm{R}^{n-1}}dt\leqslant c$$

最后，考察$\hat{z}(\xi)$在无穷远处的收敛性．因为 $z(t)$ 是强可测的，故存在简单函数序列$\{z_n(t)\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n(t)-z(t)\|_{m,\ \mathrm{R}^{n-1}}=0 \qquad a.e.\quad \forall t\in\mathrm{R}.$$

为此，设 $a.b$ 是有限数，记 $I=(a, b)$ 对函数

$$z(t)=\begin{cases} 1 & \forall t\in I \\ 0 & \forall t\bar{\in} I \end{cases}$$

有 $\hat{z}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} z(t)e^{-it\xi}dt=\int_a^b e^{-it\xi}dt=(e^{-i\xi a}-e^{-i\xi b})/i\xi$,

从而 $\lim\limits_{\xi\to\infty}\|\hat{z}(\xi)\|_{m,\ \mathbb{R}^{n-1}}=0$. 利用简单函数 $z_n(t)$ 的定义以及有限区间外的零延拓，易知，$\lim\limits_{\xi\to\infty}\|\hat{z}_n(\xi)\|_{m,\ \mathbb{R}^{n-1}}=0$. 然后利用三角不等式，可以推出 $\lim\limits_{\xi\to\infty}\|\hat{z}(\xi)\|_{m,\ \mathbb{R}^{n-1}}=0$. 证毕.

由这个定理可知，Fourier 变换 $F\in L(\mathrm{L}^1(\mathbb{R},\mathrm{H}^m(\mathbb{R}^{n-1})),$
$B(\mathbb{R},\ \mathrm{H}^m(\mathbb{R}^{n-1}))$.

**推论 4.3.1** 如果 $z(t)\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R},\ \mathrm{H}^m(\mathbb{R}^{n-1}))$，则抽象函数

$$\hat{z}(-\xi)=\int_{\mathbb{R}} z(t)e^{it\xi}dt\in B(\mathbb{R},\ \mathrm{H}^m(\mathbb{R}^{n-1})).$$

为了讨论的方便，下面把空间 $\mathbb{R}^n$ 中的点记为形式 $(x,\ t)$，这里 $x\in\mathbb{R}^{n-1}$，$t\in\mathbb{R}$. 设 $u(x,\ t)\in L^2(\mathbb{R}^n)$，用 $F_x$ 表示关于 $x$ 的 Fourier 变换，$F_t$ 表示关于 $t$ 的 Fourier 变换，$F$ 表示关于 $x$ 和 $t$ 的 Fourier 变换，即

$$F_x u=\tilde{u}(\xi,\ t)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x,\ t)e^{-i<x,\ \xi>}dx$$

$$F_t=\tilde{u}(x,\ \eta)=\int_{\mathbb{R}} u(x,\ t)e^{-it\eta}dt$$

$$Fu=\tilde{u}(\xi,\ \eta)=\int_{\mathbb{R}^n} u(x,\ t)e^{-i[<x,\ \xi>+t\eta]}dxdt$$

**定理 4.3.4** 设 $u(x,\ t)\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$，则 $F_x u$，$F_t u$，$Fu$ 分别

存在，且 $F_{xt}u = F_{tx}u = Fu$.

**证** 由 Fubini 定理知，几乎对一切 $t$，$u(x, t) \in L^2(R^{n-1})$，因而 $F_x u$ 存在，且

$$\int_{R^{n-1}} |\tilde{u}(\xi, t)|^2 d\xi = (2\pi)^{-(n-1)} \int_{R^{n-1}} |u(x, t)|^2 dx$$

由此得到

$$\int_R \int_{R^{n-1}} |\tilde{u}(\xi, t)|^2 d\xi dt = (2\pi)^{-n} \int_R \int_{R^{n-1}} |u(x, t)|^2 dx dt$$

再次利用 Fubini 定理，几乎对一切 $\xi$，$F_x u(\xi, t) \in L^2(R)$，因而 $F_{xt}u$ 存在，且

$$\int_R |F_{xt}u(\xi, \eta)|^2 d\eta = (2\pi)^{-1} \int_R |F_x u(\xi, t)|^2 dt$$

从而

$$\begin{aligned} &\int_{R^{n-1}} \int_R |F_{xt}u(\xi, \eta)|^2 d\eta d\xi \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{R^{n-1}} \int_R |\tilde{u}(\xi, t)|^2 dt d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{R^n} |u(x, t)|^2 dx dt \end{aligned}$$

现在证明 $F_{xt}u = Fu$. $F_{xt}u(\xi, \eta)$ 关于变量 $\eta$ 属于 $S'(R)$，$F_x u$ 关于变量 $\xi$ 属于 $S'(R^{n-1})$，在 $C_0^\infty(R^n)$ 中任取一个函数 $\varphi_0(x, t)$，有

$$\begin{aligned} &< F_{xt}u, \varphi_0(x, t) > = < F_x u, F_t \varphi_0(x, \eta) > \\ &= < u, F_{tx}\varphi_0(\xi, \eta) > = < u, F\varphi_0(\xi, \eta) > \\ &= < Fu, \varphi_0(x, t) > \end{aligned}$$

由 $C_0^\infty(R^n)$ 在 $S(R^n)$ 中稠密可知，对于 $\varphi_0(x, t) \in S(R^n)$ 时，上式也成立，即 $F_{xt}u = Fu$. 其它结论证明类似．证毕．

**定理4.3.5** 设$0\leqslant j\leqslant m$，$u(x,t)\in H^m(\mathbf{R}^n)$，则

$$F_x(\partial_t^j u(\xi,t))=\partial_t^j F_x u(\xi,t)$$

证 在$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$中任取一元素$\varphi_0(x,t)$，有

$$<F_x(\partial_t^j u),\ \varphi_0(x,t)>=<\partial_t^j u,\ F_x\varphi_0(\xi,t)>$$
$$=(-1)^j<u,\ \partial_t^j F_x\varphi_0(\xi,t)>$$
$$=(-1)^j<u,\ F_x\partial_t^j\varphi_0(\xi,t)>$$
$$=(-1)^j<F_x u,\ \partial_t^j\varphi_0(x,t)>$$
$$=<\partial_t^j F_x u,\ \varphi_0(x,t)>$$

证毕.

**定理4.3.6** 设抽象函数$u(x,t)$的定义域（关于$t$）为$\mathbf{R}$，值域为$H^s(\mathbf{R}^{n-1})(s\geqslant 0)$. 如果$\tilde{u}(\xi,t)\in B(\mathbf{R},\ \hat{H}^s(\mathbf{R}^{n-1}))$，则$u(x,t)\in B(\mathbf{R},\ H^s(\mathbf{R}^{n-1}))$.

证 由空间$\hat{H}^s(\mathbf{R}^{n-1})$和$H^s(\mathbf{R}^{n-1})$中元素的范数定义知

$$\|u(x,t+h)-u(x,t)\|_{H^s(\mathbf{R}^{n-1})}$$
$$=\|F_x u(\xi,t+h)-F_x u(\xi,t)\|_{\hat{H}^s(\mathbf{R}^{n-1})},$$
$$\|u(x,t)\|_{H^s(\mathbf{R}^{n-1})}=\|\tilde{u}(\xi,t)\|_{\hat{H}^s(\mathbf{R}^{n-1})}$$

证毕.

## § 4.4 空间 $H^m(R^n_+)$

设 $R^n_+=\{(x,t)\in R^n:\ t>0\}$, $R_+=\{t\in R:\ t>0\}$

引理 4.4.1 $L^2(R^n_+)=L^2(R_+,\ L^2(R^{n-1}))$.

证 设 $u\in L^2(R^n_+)$, 由 Fubini 定理知道

$$\int_{R^n_+}|u(x,t)|^2dxdt = \int_{R_+}dt\int_{R^{n-1}}|u(x,t)|^2dx \qquad (4.4.1)$$

设 $\varphi_0(x,t)\in C_0^\infty(R^n)$, 把 $\varphi_0(x,t)$看做定义域在 R,值域在 $L^2(R^{n-1})$中的抽象函数时,易知是强可测的.又因 $C_0^\infty(R^n)$在 $L^2(R^n)$中稠密,从而利用(4.4.1)可得,把 $u(x,t)$看作定义域为 R,值域在 $L^2(R^{n-1})$的抽象函数时是强可测的,故 $u(x,t)\in L^2(R_+,L^2(R^{n-1}))$.反之,由(4.4.1)知,如果 $u\in L^2(R_+,L^2(R^{n-1}))$,则 $u(x,t)$在 $R^n_+$上可测以及 $u(x,t)\in L^2(R^n_+)$. 证毕.

引理 4.4.2 $\forall\alpha\in Z^n_+$,函数 $u(x,t)\in L^2(R_+,H^m(R^{n-1}))$的充要条件是 $\partial_x^\alpha u(x,t)\in L^2(R^n_+),\forall|\alpha|\leqslant m$.

证 如果 $u(x,t)\in L^2(R_+,(H^m(R^{n-1}))$,则由

$$\int_{R+}\int_{R^{n-1}}|\partial_x^\alpha u(x,t)|^2dxdt\leqslant$$

$$\int_{R+}dt\sum_{|\alpha_1|\leqslant m}\int_{R^{n-1}}|\partial_x^{\alpha_1}u(x,t)|^2dx,\quad |\alpha|\leqslant m,$$

得 $\partial_x^\alpha u(x,t)\in L^2(R_+,L^2(R^{n-1}))$.

反之,如果 $\partial_x^\alpha u(x,t)\in L^2(R^n_+)(|\alpha|\leqslant m)$,则由引理 4.4.1 得到 $\partial_x^\alpha u(x,t)\in L^2(R_+,L^2(R^{n-1}))(|\alpha|\leqslant m)$,因此,$u(x,t)\in H^m(R^{n-1})$,*a.e.* $\forall t\in R_+$.如果 $u(x,t)$是强可测的,则由

$$\int_{R+}\|u(x,t)\|^2_{m,R^{n-1}}dt$$

$$=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_{R+}dt\int_{R^{n-1}}|\partial_x^\alpha u(x,t)|^2dx<+\infty,$$

得$u(x,t)\in L^2(R_+,H^m(R^{n-1}))$.

现在考察 $u(x,t)$的强可测性.把 $C_0^\infty(R^n,R_+^n)$中的函数看作 $L^2(R_+,H^m(R^{n-1}))$中的抽象函数,易知是强可测的.类似于定理 3.2.10 的证明,在 $C_0^\infty(R^n,R_+^n)$中构造序列,按照 $L^2(R_+,H^m(R^{n-1}))$的范数收敛于 $u(x,t)$,即 $u(x,t)$是强可测的. 证毕.

**定理 4.4.1** 设 $u(x,t)\in L^2(R_+,H^m(R^{n-1}))$,且 $\partial_t^j u(x,t)\in L^2(R_+,H^{m-j}(R^{n-1}))(0\leqslant j\leqslant m)$,则由这样的函数组成的集合与空间 $H^m(R_+^n)$一致.

**证** 由引理 4.4.2 知,$\partial_t^j u(x,t)\in L^2(R_+,H^{m-j}(R^{n-1}))(0\leqslant j\leqslant m)$的充要条件是 $\partial_x^\alpha\partial_t^j u(x,t)\in L^2(R_+^n)(|\alpha|\leqslant m-j)$.而 $\partial_x^\alpha\partial_t^j u(x,t)\in L^2(R_+^n)(|\alpha|\leqslant m-j,0\leqslant j\leqslant m)$等价于 $u(x,t)\in H^m(R_+^n)$. 证毕.

$R_+^n$的边界 $t=0$ 是 $R^{n-1}$,n 表示 $\partial R_+^n$的外法线单位向量.记 $\gamma_j u=\frac{\partial^j u}{\partial n^j}|_{t=0}=-\frac{\partial^j u}{\partial t^j}$ 为沿 $\partial R_+^n$的 $j$ 阶法向导数.则算子族 $(\gamma_0,\gamma_1,\cdots\gamma_{m-1})$称为边界算子或迹算子.

我们用 $D((a,b);X)$表示关于 $t\in(a,b)$无穷可微,而值域在 X 内的函数空间,这些函数对 $t$ 具有列紧支集.

**定理 4.4.2** 从 $D(R_+;H^m(R^{n-1}))\to(H^m(R^{n-1}))^m$ 的迹映照

$$u\to\gamma_j u=\frac{\partial^j u}{\partial n^j}|_{t=0},\ j=0,1,\cdots,m-1 \tag{4.4.2}$$

可以连续地延拓为由 $H^m(R_+^n)$到 $H^{m-j-1/2}(R^{n-1})(0\leqslant j\leqslant m-1)$的线性连续映照.

**证** 注意到$\forall u\in D(R_+;H^m(R^{n-1}))$,可以利用 Lions 延拓为 $v\in D(R;H^m(R^{n-1}))$且 $u=v|_{t>0}$.实际上,构造 Lions 延拓如下

$$v(x,t)=\begin{cases}u(x,t), & t>0\\ \sum\limits_{k=1}^{m}a_k u(x,-kt), & t<0,\end{cases}$$

其中系数 $a_k$ 选取使得

$$\sum_{k=1}^{m}(-k)^j a_k = 1, \quad (0 \leqslant j \leqslant m-1)$$

从而有

$$\partial^{(\alpha_1,\alpha_2)} v(x,t) = \begin{cases} \partial^{(\alpha_1,\alpha_2)} u(x,t) & t > 0 \\ \sum_{k=1}^{m}(-k)^{\alpha_2} a_k \partial_x^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} u(x,-kt) & t < 0 \end{cases} \tag{4.4.3}$$

因此当 $t \to 0$ 时,有$\gamma_j v = \gamma_j u \quad (0 \leqslant j \leqslant m-1)$.同时存在常数 $c$,使得$\|v\|_{m,R^n} \leqslant c\|u\|_{m,R^n_+}$ .

显然,$\forall u \in D(R,H^m(R^{n-1}))$,它都是关于 $t$ 的急降函数,即 $u \in S_t(R)$,$\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial t^j} \in S_t(R)$,从而也可做为缓增广义函数的检验函数.

注意由 Fourier 变换知 $F(1) = (2\pi)\delta \quad (n = 1$ 时),从而

$$2\pi \partial_t^j v(x,0) = \int_R \eta^j \hat{v}(x,\eta)d\eta \tag{4.4.4}$$

这里沿用过去的记号,$\hat{v}(x,\eta) = F_t v(x,t)$.由 $\gamma_j$ 的定义(4.4.2)、Fourier 变换的性质和 $H^\mu(R^{n-1})$范数的定义(4.1.2)(这里 $\mu$ 是待定实数),有

$$\|\gamma_j v\|_{\mu,R^{n-1}}^2 = \int_{R^{n-1}}(1+|\xi|^2)^\mu \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\int_R \eta^j \hat{v}(\xi,\eta)d\eta\right)^2 d\xi \tag{4.4.5}$$

首先注意

$$\begin{aligned}\int_R \eta^j \hat{v}(\xi,\eta)d\eta &\leqslant \int_R |\eta^j \hat{v}(\xi,\eta)|d\eta \\ &= \int_R |\eta^j \hat{v}|(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{m/2} \\ &\quad \cdot (1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{-m/2}d\eta\end{aligned}$$

$$\leqslant [\int_{\mathbf{R}} |\hat{v}(\xi,\eta)|^2(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^m d\eta]^{1/2}$$

$$\cdot [\int_{\mathbf{R}} (1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{-m}\eta^{2j} d\eta]^{1/2}$$

$$= I_1 \cdot I_2 \tag{4.4.6}$$

这里使用了 Schwarz 不等式.

为了估计(4.4.6)中 $I_2$,对于固定的 $\xi$,引入变量替换 $p=\eta(1+|\xi|^2)^{-1/2}$,$dp=(1+|\xi|^2)^{-1/2}d\eta$,则

$$I_2^2 = \int_{\mathbf{R}} (1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{-m}\eta^{2j} d\eta = c(m,j)(1+|\xi|^2)^{j-m+1/2}$$

其中 $c(m,j)=\int_{\mathbf{R}}(1+|p|^2)^{-m}p^{2j}dp>0,\quad j\leqslant m-1.$

然后,收 $I_2$ 代入(4.4.6),则(4.4.5)变为

$$\|\gamma_j v\|^2_{\mu,\mathbf{R}^{n-1}} \leqslant \frac{1}{(2\pi)^2} c(m,j)\int_{\mathbf{R}^{n-1}} (1+|\xi|^2)^{\mu+j-m+1/2}$$

$$\cdot \int_{\mathbf{R}} (1+|\xi|^2+|\eta|^2)^m |\hat{v}(\xi,\eta)|^2 d\eta d\xi$$

现在如果 $\mu-m+j+1/2<0$,则$(1+|\xi|^2)^{\mu+j-m+1/2}\leqslant 1$. 从而 $\forall \mu < m-j-1/2$,有

$$\|\gamma_j v\|^2_{\mu,\mathbf{R}^{n-1}} \leqslant c^2\int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2+|\eta|^2)^m |\hat{v}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta$$

$$= c^2\|v\|^2_{m,\mathbf{R}^n} \tag{4.4.7}$$

这里$c=\sqrt{c(m,j)}/2\pi$,使得不等式(4.4.7)成立的最大的 $\mu$ 为

$$\mu = m-j-1/2 \tag{4.4.8}$$

由于 $S_t(\mathbf{R})$在 $H^m(\mathbf{R}_+)$中稠密,从而可以用 $\gamma_j v$ 构造一个在 $H^m(\mathbf{R}_t)$中收敛的光滑函数的迹序列,我们仍用 $\gamma_j v$ 表示这个序列的极限,从而现在 $\gamma_j$ 表示由$\partial^j|_{t=0}$延拓的,从 $H^m(\mathbf{R}^n)$到 $H^\mu(\mathbf{R}^{n-1})$的连续映射,由于 $v\in H^m(\mathbf{R}^n)$是 $u\in D(\mathbf{R}_+,H^m(\mathbf{R}^{n-1}))$的 Lions 延拓,有

$$\|\gamma_j u\|_{m-j-1/2,\mathbf{R}^{n-1}} \leqslant c\|u\|_{m,\mathbf{R}^n_+}.$$

根据定理 4.4.1,这个等式对于 $u\in H^m(\mathbf{R}^n_+)$也是成立的. 证毕.

**定理 4.4.3** 延拓后的迹算子 $\gamma_j$ (4.4.2)是从 $H^m(\mathbf{R}^n_+)$到 $H^{m-j-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$的满映照.

证 我们只须证明,$\forall w_j\in H^{m-j-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$,必存在 $u\in H^m(\mathbf{R}^n_+)$,使得 $\gamma_j u=w_j$.令$\tilde{w}_j(\xi)=F_x w_j(x)$,则$\tilde{w}_j(\xi)\in\hat{H}^{m-j-1/2}(\mathbf{R}^{n-1}_\xi)$.

定义

$$\tilde{u}_j(\xi,t)=|\xi|^{-j}\tilde{w}_j(\xi)\varphi_j(|\xi|t),$$

其中 $\varphi_j(t)$检验函数且 $\partial_t^j\varphi_j(0)=1$.因为 $w_j(x)\in H^{m-j-1/2}(\mathbf{R}^{n-1})$,故 $(1+|\xi|^2)^{(m-j-1/2)}.\tilde{w}_j(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^{n-1}_\xi)$, 它等价于 $|\xi|^{(m-j-1/2)}\tilde{w}_j(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^{n-1}_\xi)$, 从而$\tilde{u}_j(\xi,t)\in H^m(\mathbf{R}^n_+)$, 由定理 4.4.1 知 ,$\partial_t^k\tilde{u}_j\in L^2(\mathbf{R}_+,H^{m-k}(\mathbf{R}^{n-1}))$, 此即$\tilde{u}_j\in H^m(\mathbf{R}^n_+)$. 同时

$$\gamma_j\tilde{u}_j(\xi)=|\xi|^{j-j}\tilde{w}_j(\xi)\gamma_j\varphi(0)=\tilde{w}_j(\xi) \tag{4.4.9}$$

注意到 $\partial_t\varphi_j=\partial_\lambda\varphi_j|\xi|,\lambda=|\xi|t$ 以及$\partial_t^k\varphi_j=\partial_\lambda^k\varphi_j|\xi|^k$有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^n_+}|\xi|^{2(m-k)}|\partial_t^k\tilde{u}_j(\xi,t)|^2d\xi dt\\
&=\int_{\mathbf{R}^n_+}|\xi|^{2(m-k)}|\tilde{w}_j(\xi)|^2|\partial_\lambda^k\varphi_j(\lambda)|^2(|\xi|^{-1}d\lambda)d\xi\\
&=\int_{\mathbf{R}_+}|\partial_\lambda^k\varphi_j(\lambda)|^2d\lambda\int_{\mathbf{R}^{n-1}}|\xi|^{2m-2j-1}|\tilde{w}_j(\xi)|^2d\xi\\
&\leqslant c\int_{\mathbf{R}^{n-1}}(1+|\xi|^2)^{2(m-j-1/2)}|\tilde{w}_j(\xi)|^2d\xi\\
&=c\|(1+|\xi|^2)^{m-j-1/2}\tilde{w}_j\|^2_{0,\mathbf{R}^{n-1}}\\
&\leqslant\bar{c}\|w_j\|^2_{m-j-1/2,\mathbf{R}^{n-1}}
\end{aligned}$$

利用(4.4.9),存在常数 $c_0>0$,使得当 $t\to0$ 时有

$$\|u_j\|_{m,\mathbf{R}^n_+}\leqslant c_0\|\gamma_j u_j\|_{m-j-1/2,\mathbf{R}^{n-1}} \tag{4.4.10}$$

证毕.

**定理 4.4.4** 设 $\gamma$ 是迹算子,即 $\gamma=(\gamma_0,\cdots\gamma_{m-1}),\gamma_k=\frac{\partial^k}{\partial n^k}|_{t=0},k=0.1,2,\cdots,m-1$.那末

(1) $\gamma$ 是 $H^m(R^n_+)$到乘积空间$\prod_{j=0}^{m-1}H^{m-j-1/2}(R^{n-1})$的满映照;

(2) $Ker(\gamma)=H^m_0(R^n_+)$.

**证** 由于定理 4.4.2,4.4.3,我们只须证明 (2). 设 $N(\gamma)=Ker(\gamma)$, 因为 $H^m_0(R^n_+)$ 是 $C^\infty_0(R^n_+)$ 在 $H^m(R^n_+)$ 中的闭包. 设 $\{\psi_n\}\subset C^\infty_0(R^n_+)(n=1,2.\cdots)$, 且在 $H^m_0(R^n_+)$ 中,$\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n=u$. 因为 $\psi_n|_{\partial\Omega}=0$ 以及 $\gamma$ 是连续的,从而在 $H^{m-j-1/2}(R^{n-1})$ 中,$\gamma u=\lim\limits_{n\to\infty}\gamma\psi_n=0$. 此即 $H^m_0(R^n_+)\subset N(\gamma)$. 下面,我们要证明 $N(\gamma)\subset H^m_0(R^n_+)$. 设 $u\in N(\gamma)$, 由 Taylor 展式有

$$u(x,t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}\partial^m_t u(x,s)ds \tag{4.4.11}$$

其中 $x\in R^{n-1},t\in R_+$. 引入 $l(t)\in C^\infty_0(R)$, 使得 $l(t)=1,\forall|t|\leq 1$; $0\leq l(t)\leq 1,\forall 1\leq|t|\leq 2$; $l(t)=0,\forall|t|>2.\forall\rho>0$, 作函数 $u_\rho(t)=l(t/\rho)u(x)$, 可以证明,只要 $u\in N(\gamma)$, 当 $\rho\to 0$ 时,在 $H^m(R^n_+)$ 中,有 $u_\rho\to 0$. 又因为对于 $|t|<\rho,l(t)=1$, 所以在边界上 $u-u_\rho$ 收敛于零. 从而 $N(\gamma)=Ker(\gamma)\subset H^m_0(R^n_+)$. 证毕.

定理 4.4.4 表明,迹算子 $\gamma=(\gamma_0,\gamma_1,\gamma_{m-1})$虽然是 $H^m(R^n_+)\to\prod_{j=0}^{m-1}H^{m-j-1/2}(R^{n-1})$的满映照,但不是双方单值映照.即如果$v=(v_0,\cdots v_{m-1})\in\prod_{j=0}^{m-1}H^{m-j-1/2}(R^{n-1})$,且$u\in H^m(R^n_+)$,使得 $\gamma u=v$,则$\forall w\in H^m_0(R^n_+)$,有 $\gamma(u+w)=v$.为此,我们引入商空间 $H^m(R^n_+)/H^m_0(R^n_+)$,和 § 3 · 7 中定义的一样,它的元素是由等价函

数类组成.即$\forall u\in H^m(R^n_+)$,其等价类为

$$\hat{u}=\{w\in H^m(R^n_+):\ w-u\in H^m_0(R^n_+)\}\tag{4.4.12}$$

其范数为

$$\|\hat{u}\|_{m,R^n_+}=\inf\{\|w\|_{m,R^n_+}:\gamma w=u,\forall w\in H^m(R^n_+)\},$$

那末,迹映照 $\gamma$ 是从$H^m(R^n_+)/H^m_0(R^n_+)\to\prod_{j=0}^{m-1}H^{m-j-1/2}(R^{n-1})$的双方单值映照.

由定理 4.4.2 和(4.4.7)式可得$\|\gamma_j u\|_{m-j-1/2,R^{n-1}}\leqslant c\|u\|_{m,R^n_+}$,由定理 4.4.3 和(4.4.10),可得$\|\hat{u}\|_{m,R^n_+}\leqslant c_0\|\gamma_j u\|_{m-j-1/2,R^{n-1}}$,故有

$$c_1\|\hat{u}\|_{m,R^n_+}\leqslant\|\gamma_j u\|_{m-j-1/2,R^{n-1}}\leqslant c_2\|u\|_{m,R^n_+}\tag{4.4.13}$$

从而,迹空间$H^{m-j-1/2}(R^{n-1})$的范数也可定义为

$$\|v\|^*_{m-j-1/2,R^{n-1}}=\inf\{\|u\|_{m,R^n_+}:\gamma_j u=v,\forall u\in H^m(R^n_+)\}\tag{4.4.14}$$

而且这个范数和$\|\cdot\|_{m-j-1/2,R^{n-1}}$是等价的.由(4.4.14)所定义的范数,有

$$\|\gamma_j u\|^*_{m-j-1/2,R^{n-1}}\leqslant\|u\|_{m,R^n_+}.\tag{4.4.15}$$

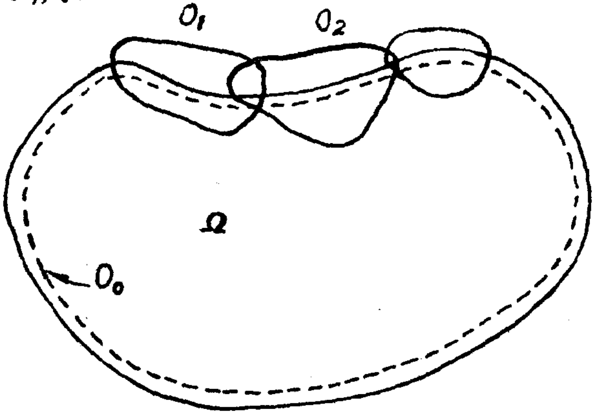
于是,我们有

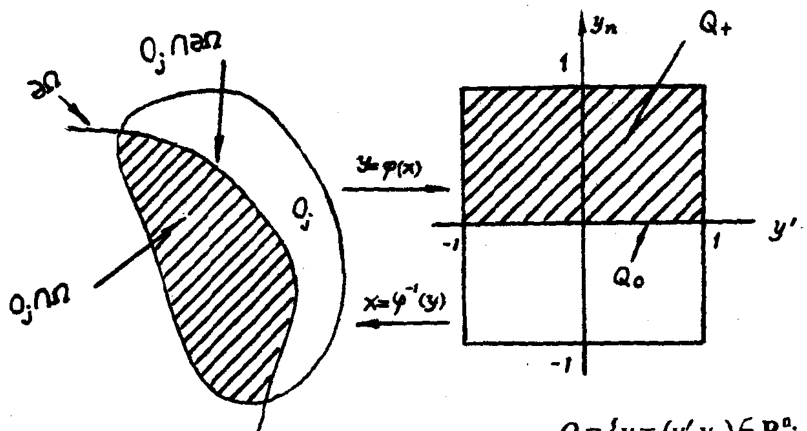
**推论 4.4.1** 映照 $u\to\gamma u$ 可以连续延拓为一个从$H^m(R^n_+)/H^m_0(R^n_+)$ 到 $\prod_{j=0}^{m-1}H^{m-j-1/2}(R^{n-1})$上的一个同构.

## § 4.5 迹空间 $H^S(\partial\Omega)$

设 $\Omega\subset R^n$ 是 $C^m$ 型区域(见定义 3.4.1),$\tilde{Q}=\{O_i\}(1\leqslant i\leqslant m)$是 $\partial\Omega$ 的开覆盖,$\{\varphi_j\}(1\leqslant j\leqslant m)$是 $O_j$ 到 $Q$ 的局部坐标变

换．设 $\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{m} C$ ，$\{\psi_j\}$ 是 $\Omega$ 的从属于开覆盖 $\{O_i\}(i=0,\cdots m)$ 的单位分解，即 $\psi_j(x)\in C_0^\infty(O_j)(0\leqslant j\leqslant m),\sum_{j=0}^{m}\psi_j(x)=1,\psi_j(x)\geqslant 0,\forall x\in O_j$;等.




$Q=\{y=(y',y_n)\in \mathbf{R}^n;$
$|y'|<1,\ -1<y_n<1\}$

从而$\forall u\in H^m(\Omega)$，有 $u=\sum_{j=0}^{m}\psi_j u, u^2=\sum_{j=0}^{m}(\sqrt{\psi_j}\,u)^2$. 设有定义在$\overline{\Omega}\cap O_j$ 上的函数 $v(x)$，则经过局部坐标变换 $x=\varphi_j^{-1}(y)$ 后的函数记为 $w_j(v)$，即

$$w_j(v)(y)=v(\varphi_j^{-1}(y)). \qquad \forall y\in Q \tag{4.5.1}$$

同样的，如 $v(y)$定义在 $Q$ 上，经过局部坐标变换 $y=\varphi_j(x)$后为

$$w_j^*(v)(x)=v(\varphi_j(x)) \tag{4.5.2}$$

则有

$$\begin{aligned} u&=\sqrt{\psi_0}(\sqrt{\psi_0}\,u)+\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\psi_j}(\sqrt{\psi_j}\,u)\\ &=\sqrt{\psi_0}(\sqrt{\psi_0}\,u)+\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\psi_j}\,w_j^*[w_j(\sqrt{\psi_j}\,u)(y)] \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

因为 $\operatorname{supp}\psi_j\subset O_j$，所以 $\operatorname{supp}w_j(\sqrt{\psi_j}\,u)\subset Q$. 从而可以通过在 $Q$ 外而定义为零的方法（即零延拓），把 $w_j(\sqrt{\psi_j}\,u)$ 定义在整个 $\mathbf{R}^n_+$ 上，即 $w_j(\sqrt{\psi_j}\,u)\in H^m(\mathbf{R}^n_+)$，且 $\operatorname{supp}w_j(\sqrt{\psi_j}\,u)\subset Q_+=\{y{:}y\in Q,y_n\geqslant 0\}$. 则映照

$$\psi u=(\sqrt{\psi_0}\,u,w_1\sqrt{\psi_1}\,u,\cdots,w_m\sqrt{\psi_m}\,u)$$

是从 $H^m(\mathbf{R}^n)$到 $H^m(\mathbf{R}^n)\times\prod_{j=1}^{m}H^m(\mathbf{R}^n_+)$的同构.

对于任意实数 s，定义下述空间

$$\begin{aligned} H^S(\partial\Omega)=\{u:\ & w_j(\sqrt{\psi_j}\,u)(y',0)\\ &\in H^S(\mathbf{R}^{n-1}_{y'});\ j=1,\cdots,m\} \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

其范数定义为

$$\|u\|_{s,\partial\Omega}=\left[\sum_{j=1}^{m}\|w_j(\sqrt{\psi_j}\,u)(y',0)\|^2_{s,\mathbf{R}^{n-1}_{y'}}\right]^{1/2} \tag{4.5.5}$$

可以证明，由(4.5.4)和(4.5.5)所定义的 $H^S(\partial\Omega)$虽然依赖于

$O_j,\varphi_j$ 和 $\psi_j$ 的选取,但由它们所定义的范数都是等价的.显然,$H^S(\partial\Omega)$具有性质

**定理 4.5.1** 迹空间 $H^S(\partial\Omega)$是 Hilbert 空间.

**定理 4.5.2** $\forall s\geqslant 0, C_0^\infty(\partial\Omega)$在 $H^S(\partial\Omega)$中稠密.

**定理 4.5.3** $\forall s\geqslant 0, (H^S(\partial\Omega))'=H^{-S}(\partial\Omega)$.

利用 $\Omega\subset R^n$ 是 $C^m$ 型区域的定义,我们可以选取局部坐标变换 $\varphi_j: O_j\to Q \quad (1\leqslant j\leqslant m)$,使得

$$\frac{\partial}{\partial n}(\sqrt{\psi_j}\,u)=\frac{\partial}{\partial y_n}(w_j\sqrt{\psi_j}\,u)|_{y_n=0}.$$

故对每个$\sqrt{\psi_j}\,u$,可以应用定理 4.4.3 和 4.4.4,有

**定理 4.5.4** 设 $\Omega\subset R^n$ 是 $C^m$ 型区域,那末从 $D(\Omega)$到 $(D(\partial\Omega))^m$ 的迹算子 $\gamma=(\gamma_0,\cdots\gamma_{m-1})$可以连续地延拓为从 $H^m(\Omega)$到 $\prod_{j=0}^{m-1}H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$ 上的线性连续满映照,即存在常数 $c>0,\forall u\in H^m(\Omega)$, 必有 $\gamma_j u\in H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$, 且

$$\|\gamma_j u\|_{m-j-1/2,\partial\Omega}\leqslant c\|u\|_{m,\Omega}. \tag{4.5.6}$$

其次,存在从$\prod_{j=0}^{m-1}H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$到 $H^m(\Omega)$内连续的右逆映照 $\gamma^{-1}$,即$\forall v_j\in H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$,至少存在一个 $\gamma^{-1}v\in H^m(\Omega)$,使得 $\|\gamma^{-1}v\|_{m,\Omega}\leqslant c'\|v\|_{m-j-1/2,\partial\Omega}$.

还有 $\mathrm{Ker}(\gamma)=H_0^m(\Omega)$.

更一般地,有

**定理 4.5.5** 设 $\Omega\subset R^n$ 是充分光滑,则从 $D(\Omega)$到$(D(\partial\Omega))^m$ 的迹映照 $\gamma=(\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$能够连续的延拓为从 $H^S(\Omega)$到 $\prod_{j=0}^{m}H^{s-j-1/2}(\partial\Omega)$ 上的线性连续的满映照. 这里 $m$ 是满足 $m<s-1/2$ 的最大整数. 即$\forall u\in H^s(\Omega)$, 必有 $\gamma_j u\in H^{s-j-1/2}(\partial\Omega)$, 使

得

$$\|\gamma_j u\|_{s-j-1/2,\partial\Omega} \leqslant c\|u\|_{s,\Omega} \tag{4.5.7}$$

其次，存在从$\prod_{j=0}^{m} H^{s-j-1/2}(\partial\Omega)$到$H^s(\Omega)$内的连续右逆映照$\gamma^{-1}$，即$\forall v_j \in H^{s-j-1/2}(\partial\Omega)$，存在$\gamma_j^{-1}v \in H^s(\Omega)$，使得

$$\|\gamma_j^{-1}v\|_{s,\Omega} \leqslant c'\|v_j\|_{s-j-1/2,\partial\Omega}$$

还有 $\mathrm{Ker}(\gamma) = H_0^S(\Omega)$.

推论 4.5.1 如果$\Omega$充分光滑，则$H^S(\Omega)$中元素$u \in H_0^S(\Omega)$的充要条件是$\forall u \in H^S(\Omega), \gamma_j u = 0, 0 \leqslant j \leqslant m$，$m$是满足$m < s-1/2$的最大整数.

和半空间情况一样，我们也可以用下述方法引入迹空间$H^{s-j-1/2}(\partial\Omega)$的范数

$$\|v\|_{s-j-1/2,\partial\Omega} = \inf\{\|u\|_{s,\Omega}:\ \gamma u = v,\ \forall u \in H^s(\Omega)\} \tag{4.5.8}$$

它等价于(4.5.5).显然有

$$\|\gamma_j u\|_{s-j-1/2,\partial\Omega} \leqslant \|u\|_{s,\Omega} \quad \forall u \in H^s(\Omega) \tag{4.5.9}$$

尤其是，当$m=1, j=0$时，(4.5.8)和(4.5.9)可以表示为

$$\|v\|_{1/2,\partial\Omega} = \inf_{u \in H^1(\Omega)} \{\|u\|_{1,\Omega}:\ v = \gamma u\} \tag{4.5.10}$$

$$\|\gamma_0 u\|_{1/2,\partial\Omega} \leqslant \|u\|_{1,\Omega} \qquad \forall u \in H^1(\Omega) \tag{4.5.11}$$

而$\gamma_0^-$为$\gamma_0$之右逆，那末对任何$\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$，有

$$\|\gamma^{-1}\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant \|\varphi\|_{1/2,\partial\Omega} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega) \tag{4.5.12}$$

在边值问题的应用中，常常需要计算$\|\varphi\|_{1/2,\partial\Omega}$以及$\|\varphi\|_{-1/2,\partial\Omega}$等，下面两个引理给出具体的计算方法.

引理 4.5.1 设$\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$，那末有

$$\|\varphi\|_{1/2,\partial\Omega} = \|u\|_{1,\Omega} \tag{4.5.13}$$

其中$u$是下列 Dirichlet 问题的解:

$$\begin{cases} -\Delta u+u=0 & \text{在 } \Omega \text{ 中} \\ \gamma_0 u=\varphi & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \tag{4.5.14}$$

证 由定义(4.5.10)知，$\|\varphi\|_{1/2,\partial\Omega} \leqslant \|u\|_{1,\Omega}$.另一方面，由方程(4.5.14)有 $\forall v \in H^1(\Omega)$.

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds;$$

所以 $\|u\|_{1,\Omega}^2 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi ds \leqslant \|\varphi\|_{1/2,\partial\Omega} \|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{-1/2,\partial\Omega}$

又由迹定理4.5.5有$\|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{-1/2,\partial\Omega} \leqslant \|u\|_{1,\Omega}$.因此

$\|u\|_{1,\Omega} \leqslant \|\varphi\|_{1/2,\partial\Omega}$. 证毕.

引理 4.5.2 设 $\varphi \in L^2(\partial\Omega), z \in H^1(\Omega)$是下列是 Ncumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta z+z=0 & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \frac{\partial z}{\partial n} = \varphi. & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \tag{4.5.15}$$

的解，那末

$$\|\varphi\|_{-1/2,\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \varphi \gamma_0 z ds = \|z\|_{1,\Omega}^2 \tag{4.5.16}$$

证 因为 $z$ 是(4.5.15)的解，$\forall v \in H^1(\Omega)$，有

$$(z,v)_1 = \int_\Omega (\nabla z \cdot \nabla v + zv) dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \gamma_0 v ds \tag{4.5.17}$$

令 $v = z$，则 $\|z\|_{1,\Omega}^2 = \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot \gamma_0 z ds$,

从而

$$\|\varphi\|_{-1/2,\partial\Omega} = \sup_{\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)} \frac{|\int_{\partial\Omega} \varphi \psi ds|}{\|\psi\|_{1/2,\partial\Omega}}$$

$$\geqslant \frac{\left|\int_{\partial\Omega}\gamma_o z\varphi ds\right|}{\|\gamma_o z\|_{1/2,\partial\Omega}} = \frac{\|z\|_{1,\Omega}^2}{\|\gamma_o z\|_{1/2,\partial\Omega}},$$

由迹定理(4.5.11),有

$$\|\varphi\|_{-1/2,\partial\Omega} \geqslant \|z\|_{1,\Omega}^2. \tag{4.5.18}$$

另一方面,由(4.5.12)知

$$\|\varphi\|_{-1/2,\partial\Omega} = \sup_{\psi\in H^{1/2}(\partial\Omega)} \frac{\left|\int_{\partial\Omega}\varphi\psi ds\right|}{\|\psi\|_{1/2,\partial\Omega}} = \sup_{\psi\in H^{1/2}(\partial\Omega)} \frac{|(z,\gamma_o^{-1}\psi)_1|}{\|\psi\|_{1/2,\partial\Omega}}$$

$$\leqslant \|z\|_{1,\Omega} \sup_{\psi\in H^{1/2}(\partial\Omega)} \frac{\|\gamma_o^{-1}\psi\|_{1,\Omega}}{\|\psi\|_{1/2,\partial\Omega}} \leqslant \|z\|_{1,\Omega}. \tag{4.5.19}$$

由(4.5.18)和(4.5.19)即得(4.5.16). 证毕.

更一般地,我们可以在 $H^{s,p}(\Omega)$空间中考察迹映照.这时同样可以定义迹空间 $H^{s-1/p-j,p}(\partial\Omega)$.记

$$\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega},\quad \gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial n^j},\ j = 1,2,\cdots[s], \forall u\in D(\Omega)$$

那么有

**定理 4.5.6** 设 $\Omega\subset R^n$ 是 $C^k$ 型区域,$1<p<\infty$,$s\geqslant 0$ 为两个实数,$s\leqslant k+1$,$s-1/p=l+\sigma$,$l\geqslant 0$,$0<\sigma<1$,那么定义在 $D(\Omega)$上的线性映照 $u\rightarrow\gamma u=(\gamma_0 u,\gamma_j u,j=1,2,\cdots l)$可以唯一地延拓为商空间 $H^{s,p}(\Omega)/H_0^{l,p}(\Omega)$到乘积迹空间$\prod_{j=0}^{l} H^{s-1/p-j,p}(\partial\Omega)$上的同构,并且

$$Ker(\gamma) = H_0^{l,p}(\Omega) \tag{4.5.19}$$

定理 4.5.6 告诉我们,可以定义等价的迹空间范数

$$\|u\|_{s-1/p-j,p,\partial\Omega} = \inf\left\{\|v\|_{s,p,\Omega}:\ \gamma_j v = u, \forall v\in H^{s,p}(\Omega)\right\} \tag{4.5.20}$$

## §4.6 某些向量值函数 Соболев 空间

在实际应用中,常常会遇到涉及向量场的散度(div)或旋度(curl)的特殊函数空间,为此我们引入一些特殊的向量值函数 Соболев 空间,研究它们的分解,嵌入和迹定理.

定理 4.6.1 设 $E_1,E_2,E_3$ 是 Banach 空间,$A\in L(E_1,E_2)$,$B\in L(E_1,E_3)$,B 还是紧算子,使得 $\forall u\in E_1$

范数 $\|u\|_{E_1}$ 与 $\|Au\|_{E_2}+\|Bu\|_{E_3}$ 等价. (4.6.1)

则成立下列结论:

(1) Ker(A)的维数是有限的,映照 A 是一个从 $E_1/\mathrm{Ker}(A)$ 到 R(A)上的同构,R(A)是 $E_2$ 的闭子空间.

(2) 如果 E 是 Banach 空间,$l\in L(E_1,E)$ 在 Ker(A)上为零,则存在一个常数 $c_0$,使得

$$\|lu\|_E\leqslant c_0\|l\|_{L(E_1,E)}\|Au\|_{E_2}\quad \forall u\in E_1 \tag{4.6.2}$$

(3) 如果 G 是 Banach 空间,$M\in L(E_1,G)$ 满足

$$Mu\neq 0\qquad \forall u\in \mathrm{Ker}(A)/\{0\} \tag{4.6.3}$$

则范数 $\|u\|_{E_1}$ 与 $\|Au\|_{E_2}+\|Mu\|_G$ 等价. (4,6.4)

证 (1)这里我们要用到一个熟知的结论,即如果线性赋范空间 X 中的单位球是紧的,则 X 是有限维的.首先由(4.6.1)知,$\|u\|_{E1}$ 和 $\|Bu\|_{E3}$ 是 Ker(A)上的两个等价范数.现在设$\{u_n\}$是 Ker(A)中有界集合,因为 B 是紧算子,可以选出一个子序列,仍记为$\{u_n\}$,使得 $Bu_n$ 在 $E_3$ 中收敛.从而$\{u_n\}$是 $E_1$ 中的 Cauchy 序列而且还是 Ker(A)中的收敛序列.因此 Ker(A)中的单位球是紧的,所以,Ker(A)是有限维的.

既然 Ker(A)是 $E_1$ 的有限维子空间,我们可以引进商空间:$X=E_1/\mathrm{Ker}(A)$,对于商范数(见 § 3.7)$\|\hat{u}\|_X=\inf\limits_{u\in\hat{u}}\|u\|_{E_1}$,X 是 Banach 空间.此外,因为 Ker(A)是有限维的,上面的下确界 inf 是

Cauchy 序列以及$\lim\limits_{\mu\to\infty} u_\mu = u$,由我们的假设就有

$$\mathrm{A}u = 0, \qquad \mathrm{M}u = 0, \qquad \|u\|_{E_1} = 1,$$

但是由(4.6.3)知此时应有 $u=0$,从而矛盾. 证毕.

现在设 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$ 是有界开集,并且具有 Lipschitz 连续边界.我们开始处理向量值函数,用黑体小写字母表示向量,并按下列方式把以前所给出的范数推广到向量: $\mathbf{v}=(v_1,\cdots,v_n)$,则

$$\|\mathbf{v}\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{n}\|v_i\|_{m,p,\Omega}^{p}\right)^{1/p}.$$

下面的定理是泛函分析一般结论的一部分.是由 Nccas 完成的.由于它的证明长而又比较困难,这里仅给出结论.

**定理 4.6.2** 设 $\Omega$ 是 $\mathrm{R}^n$ 中有界开集,并具有 Lipschitz 连续边界,则存在一个常数 $c>0$,它仅与 $\Omega$ 有关,使得

$$\|p\|_{0,\Omega} \leqslant c\{\|p\|_{-1,\Omega} + \|\mathrm{grad}\ p\|_{-1,\Omega}\} \quad \forall p\in \mathrm{L}^2(\Omega) \tag{4.6.6}$$

作为它的直接推论,我们有

**推论 4.6.1.** (1) 在定理 4.6.2 的假设下,梯度算子 $\mathrm{grad}\in \mathrm{L}(\mathrm{L}^2(\Omega);\ \mathrm{H}^{-1}(\Omega)^n)$的值域是 $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)^n$ 的闭子空间.(2) 如果 $\Omega$ 还是单联通的,则存在一个仅与 $\Omega$ 有关的常数 $c$,使得

$$\|\hat{p}\|_{L^2(\Omega)/\mathrm{R}} \leqslant c\|\mathrm{grad}\ \hat{p}\|_{-1,\Omega} \qquad \forall \hat{p}\in \mathrm{L}^2(\Omega)/\mathrm{R} \tag{4.6.7}$$

(3) 设开子集 $\omega\subset\Omega$ 测度为正,则存在一个仅与 $\Omega$ 和 $\omega$ 有关的常数 $c_\omega>0$ 使得

$$\|p\|_{0,\Omega} \leqslant c_\omega\{\|p\|_{0,\omega} + \|\mathrm{grad}\ p\|_{-1,\Omega}\} \quad \forall p\in \mathrm{L}^2(\Omega) \tag{4.6.8}$$

证 主要思路是用定理 4.6.1,取 $\mathrm{E}_1=\mathrm{L}^2(\Omega)$,$\mathrm{E}_2=\mathrm{H}^{-1}(\Omega)^n$,$\mathrm{E}_3=\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$,$\mathrm{A}=\mathrm{grad}$,B 取为 $\mathrm{L}^2(\Omega)$到 $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$上的嵌入算子,由 Соболев 嵌入定理知 B 是紧算子.显然,

$$\|p\|_{-1,\Omega} + \|\mathrm{grad}\ p\|_{-1,\Omega} \leqslant c_1\|p\|_{0,\Omega} \quad \forall p\in \mathrm{L}^2(\Omega),$$

从而,由(4.6.6)得(4.6.1),第一个结论成立.

类似地,因为 $\Omega$ 是单连通域,$R=\mathrm{Ker(grad)}$以及(4.6.5)证得(4.6.7).

最后,设 $G=L^2(\omega)$,$M$: $L^2(\Omega)\to L^2(\omega)$是恒等映射,由于 $\omega$ 有正测度,$\forall c\in R$ 且 $c\neq 0$, $Mc\neq 0$,以及(4.6.4)得出(4.6.8)式. 证毕.

上面的推论给出一个重要的正则性结论.

**推论 4.6.2** 设 $\Omega$ 是单连通域并满足定理 4.6.2 的假设.如果 $p\in L^2_{loc}(\Omega)$,grad $p\in H^{-1}(\Omega)^n$,则 $p\in L^2(\Omega)$.

**证** 记 $X=\{p\in L^2_{loc}(\Omega)\text{: grad } p\in H^{-1}(\Omega)^n\}$以及

$$[p]_\omega=\|p\|_{0,\omega}+\|\mathrm{grad}\ \ p\|_{-1,\Omega},$$

这里 $\omega\subset\subset\Omega$ 有正测度,则$[\cdot]_\omega$ 是 X 上的范数并且由(4.6.8)可知,$[\cdot]_\omega$ 和 $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ 是 $L^2(\Omega)$上的两个等价范数.从而对范数$[\cdot]_\omega$ 而言,$L^2(\Omega)$是 Banach 空间,故只要证明对于$[\cdot]_\omega$,$L^2(\Omega)$在 X 中是稠密的.

(1) 先设 $\Omega$ 相对其上的一点,比如 $y$ 是严格星形的,即 $y$ 为原点,$\theta\overline{\Omega}\subset\Omega$ $\forall\theta\in[0,1)$ 以及$\overline{\Omega}\subset\theta\Omega,\forall\theta>1$. 这里,取 $\theta>1$ 并记 $\Omega_\theta=\theta\Omega$.$\forall\varphi\in C(\Omega)$,我们引入 $\Omega_\theta$ 上定义的变量替换 $\varphi\to\varphi_\theta$ 如下

$$\varphi_\theta(x)=\varphi(x/\theta)\qquad\forall\ x\in\Omega_\theta.$$

通过 $\langle u_\theta,\varphi\rangle=\theta^n\langle u,\varphi_{1/\theta}\rangle\qquad\forall\varphi\in D(\Omega_\theta)$

把它延拓为分布(或广义函数),$u\in D'(\Omega)\to u_\theta\in D'(\Omega_\theta)$. 现在,容易验证 $\mathrm{grad}(u_\theta)=(1/\theta)(\mathrm{grad}\ u)_\theta\qquad\forall u\in D'(\Omega)$,

$$\lim_{\theta\to1}\|u_\theta-u\|_{0,\Omega}=0\qquad\forall u\in L^2(\Omega)$$

$$\lim_{\theta\to1}\|u_\theta-u\|_{-1,\Omega}=0\qquad\forall u\in H^{-1}(\Omega).$$

从而,如果 $p\in X$,则 $p_\theta\in L^2(\Omega)$ $(\forall\theta>1)$以及注意到上面的说明,可以立刻得到$\lim\limits_{\theta\to1}[p_\theta-p]_\omega=0$,此即 $p\in L^2(\Omega)$.

(2) 在一般情况下,我们利用下述性质:

L 型区域是有限个星形的 Lipschitz 连续开集的并.

很清楚,只要对每一个这样的集合利用上面的讨论,就可以得到整个区域上所期望的结果. 证毕.

除非有特别的说明,在这里讨论所用的区域 $\Omega \subset R^n$ 都是 L 型区域.

(一) 有关散度算子的某些函数空间

对于向量 $v = \{v_1, \cdots, v_n\}$,定义散度算子如下

$$\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^{n} (\partial v_i / \partial x_i) \qquad \text{(对笛卡尔坐标系而言)}$$

引入下列零散度函数空间

$$V_o = \{\Phi \in D(\Omega)^n: \ \operatorname{div} \ \Phi = 0\},$$

$$V = \{v \in H_0^1(\Omega)^n: \ \operatorname{div} \ v = 0\}.$$

由 § 3.6 Соболев 空间中等价范数知,在 $H_0^1(\Omega)^n$ 中半范 $|\cdot|_{1,\Omega}$ 与全范 $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ 是等价的.因为 V 是 $H_0^1(\Omega)^n$ 的闭子空间,故有分解 $H_0^1(\Omega)^n = V \oplus V^{\perp}$,这里 $V^{\perp}$ 是 V 的关于 $H_0^1(\Omega)$ 的 $|\cdot|_{1,\Omega}$ 半范的内积(grad u, grad v)的直交补.

引理 4.6.1 如果 $f \in H^{-1}(\Omega)^n$ 满足

$$\forall v \in V, \qquad < f, \ v > \ = 0, \tag{4.6.9}$$

则存在 $p \in L^2(\Omega)$ 使得 $f = \operatorname{grad} \ p$.如果 $\Omega$ 是单联通域,在相差一个常数外,$p$ 是唯一确定的.

证 首先注意 $-\operatorname{grad} \in L(L^2(\Omega); \ H^{-1}(\Omega)^n)$ 是 $\operatorname{div} \in L(H_0^1(\Omega)^n, L^2(\Omega))$ 的对偶算子.其次,因为 R(grad)是 $H^{-1}(\Omega)^n$ 的闭子空间,则由 Banach 闭值域定理 [19]有 $R(\operatorname{grad}) = (\operatorname{Ker} \ (\operatorname{div}))^0 = V^0$,这里 $V^0$ 表示 V 的极集:

$$V^o = \{y \in H^{-1}(\Omega)^n: < y, \ \Phi > \ = 0, \forall \Phi \in V\}, \tag{4.6.10}$$

这正是本命题所需结论.证毕.

下面的推论刻划了 $V^{\perp}$,首先给出一个定义.

定义 4.6.1 设 $(-\triangle)^{-1}\in L(H^{-1}(\Omega)^n;\ H_0^1(\Omega)^n)$ 是 $R^n$ 中 $-\triangle$ 的 Dirichlet 齐次问题的 Green 算子,即 $u=(-\triangle)^{-1}f$ 当且仅当 u 是下述方程的解:

$$-\triangle u=f \quad 在\ \Omega\ 中, \qquad u=0 \quad 在\ \partial\Omega\ 上.$$

推论 4.6.3 $V^{\perp}=\{(-\triangle)^{-1}\mathrm{grad}\ q:\ q\in L^2(\Omega)\}$

证 首先容易验证 $\forall q\in L^2(\Omega),(-\triangle^{-1})\mathrm{grad}q\in V^{\perp}$.反之,设 $u\in V^{\perp}$ 并考虑 $H_0^1(\Omega)^n$ 上由 $\langle l,\ v\rangle=(\mathrm{grad}\ u,\ \mathrm{grad}\ v)$ 定义的线性泛函 $l$.则由引理 4.6.1,存在 $p\in L^2(\Omega)$,使得

$$\langle l,v\rangle=(\mathrm{grad}\ u,\mathrm{grad}\ v)=\langle \mathrm{grad}\ p,v\rangle\ \forall v\in H_0^1(\Omega)^n,$$

从而确实有表达式 $u=(-\triangle^{-1})\mathrm{grad}\ p$. 证毕.

由 Green 公式可以得到

$$\int_\Omega \mathrm{div}\ v\ dx=0 \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega)^n$$

从而值空间 R(div)包含在 $L^2(\Omega)$ 的一个真的闭子空间里,为方便起见,记为

$$L_0^2(\Omega)=\{p\in L^2(\Omega):\ \int_\Omega p ds=0\}.$$

特别由于下述事实

$$\|q\|_{0,\Omega}=\inf_{c\in R}\|q+c\|_{0,\Omega}=\|\hat{q}\|_{L^2(\Omega)/R}$$

$$\forall q\in L_0^2(\Omega) \tag{4.6.11}$$

使 $L_0^2(\Omega)$ 更为有用.$L_0^2(\Omega)$ 可以与 $L^2(\Omega)/R$ 同构.下面的推论进一步指出 div 的值空间的确是 $L_0^2(\Omega)$.

推论 4.6.4 设 $\Omega$ 是单联通域,则

(1) 算子 grad 是 $L_0^2(\Omega)$ 到 $V^0$ 上的同构.

(2) 算子 div 是 $V^{\perp}$ 到 $L_0^2(\Omega)$ 上的同构.

证 (1) 我们知道 $\mathrm{grad}\in L(L_0^2(\Omega),V^0)$,又由引理 4.6.1 可知

grad 是双射.因为 $L_0^2(\Omega), V^{\circ}$ 都是 Banach 空间,故 grad 是一个同构.

(2) 由(1)以及 div 是算子−grad 的对偶算子,可知 div 是 $(V^{\circ})'$ 到 $(L_0^2(\Omega))'$ 上的同构.故现在只需证明 $V^{\circ}$ 可以等同于 $(V^{\perp})'$.设任给 $g\in(V^{\perp})'$,并按照

$$<\tilde{g}, v> \;=\; <g, v^{\perp}> \quad \forall v\in H_0^1(\Omega)^n$$

把 g 延拓到 $H_0^1(\Omega)^n$ 上,其中 $v^{\perp}$ 表示 v 到 $V^{\perp}$ 上的正交投影.显然,$\tilde{g}\in V^{\circ}$ 以及映射 $g\to\tilde{g}$ 是 $(V^{\perp})'$ 到 $V^{\circ}$ 上的同构.从而 $(V^{\perp})'$ 等同于 $V^{\circ}$. 证毕.

又设 n 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法线向量.下面的引理利用零散度函数给出了一个边值的平移算子.

**引理 4.6.2** 设 $\Omega$ 是单联通域,$\forall g\in H^{1/2}(\partial\Omega)^n$,

$\int_{\partial\Omega} gnds=0$,则存在函数 $u\in H^1(\Omega)^n$,在相差 V 中一个函数的意义下是唯一确定的,使得

$$\text{div } u=0 \quad 在\ \Omega\ 中; \qquad u=g \quad 在\ \partial\Omega\ 上.$$

进一步,有

$$\inf_{v\in V}\|u+v\|_{1,\Omega}\leqslant c\|g\|_{1/2,\partial\Omega}, \tag{4.6.12}$$

这里常数 $c>0$ 与 u 和 g 无关.

证 显然,在 $[H^1(\Omega)^n]/V$ 中,这样的函数 u 是唯一的.现在考察它的存在性.设 $H^1(\Omega)^n$ 中任一函数 w,满足 $w=g|_{\partial\Omega}$,则由 Green 公式

$$\int_{\Omega}\text{div } w dx=\int_{\partial\Omega} gnds=0.$$

从而 $\text{div } w\in L_0^2(\Omega)$,而且由于推论 4.6.4(2),存在唯一的 $v\in V^{\perp}$ 使得 $\text{div } v=\text{div } w$, 以及 $|v|_{1,\Omega}\leqslant c_1\|\text{div } w\|_{0,\Omega}$.

显然,$u=w-v$ 是所要求的函数.剩下的是验证(4.6.12)式.首先,注意到$\|u\|_{1,\Omega}\leqslant c_2\|w\|_{1,\Omega}$,这里常数 $c_2>0$ 与 u 和 w 无关.在上面这个不等式两端取下确界,并注意到 $H^{1/2}(\partial\Omega)$范数的定义,即可得到(4.6.12)式. 证毕.

下面给出的定理是引理 4.6.1 的更好的描述.

**定理 4.6.3** 如果 $f\in H^{-1}(\Omega)^n$ 满足

$$<f,\Phi> = 0 \qquad \forall\Phi\in V_o, \tag{4.6.13}$$

则存在 $p\in L^2(\Omega)$,使得 $f=\text{grad } p$,

如果 Ω 是单连通的,在相差一个可加常数的意义下,$p$ 是唯一确定的.

证 我们先设 Ω 是单连通的,我们证明 $f=\text{grad } p$, $\forall p\in L^2_{loc}(\Omega)$,然后由推论 4.6.2 立刻得 $p\in L^2(\Omega)$.

因为 Ω 是单连通的 L 型区域,存在着单连通的 L 型区域的增序列$\{O_m\}(m\geqslant 1)$,使得$\overline{O}_m\subset\Omega$ 以及 $\Omega=\bigcup\limits_{m\geqslant 1}O_m$

设 $u_m\in H_0^1(\Omega)^n$ 满足

$$\text{在}O_m\text{之外}u_m=0,\text{且}\operatorname{div}u_m=0.$$

为了应用引理 4.6.1,我们要在保持零散度的情况下把 $u_m$ 正则化,这是通过我们在 § 1.8 中引进的磨光算子实现的.

$\forall\varepsilon>0$,令 $\omega_\varepsilon$ 是 $D(R^n)$中正则化族,即

$$\omega_\varepsilon(x)=0,\ \text{当}\|x\|>\varepsilon;\qquad \omega_\varepsilon(x)\geqslant 0,\ \int_{R^n}\omega_\varepsilon(x)dx=1$$

以及在 $D'(R^n)$中有$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega_\varepsilon=\delta$.

由卷积的性质有 $\operatorname{div}(\omega_\varepsilon * u_m)=\omega_\varepsilon*\operatorname{div}u_m=0$ 以及如果 ε 充分小,$\omega_\varepsilon*u_m\in D(\Omega)^n$,在 $H^1(\Omega)^n$ 中有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\omega_\varepsilon*u_m)=u_m$$

从而由(4.6.13)有

$$<\mathbf{f},\mathbf{u}_m> = \lim_{\varepsilon\to 0} <\mathbf{f},\ \omega_\varepsilon * \mathbf{u}_m> = 0$$

由引理 4.6.1 知,存在 $p_m\in L^2(O_m)$,使得在 $O_m$ 中.$\mathbf{f}=\mathrm{grad}\,p_m$.此时,由于在 $O_m$ 中 $\mathrm{grad}\,p_m=\mathrm{grad}\,p_{m+1}$,则在 $O_m$ 中 $p_{m+1}-p_m$ 是一个常数.但是由于 $p_m$ 在相差一个常数的意义下是唯一确定的,这个常数应取得使

$$\text{在}O_m\text{中},p_{m+1}=p_m\quad \forall m\geqslant 1.$$

从而存在 $p\in L^2_{loc}(\Omega)$,使得在 $\Omega$ 中.$\mathbf{f}=\mathrm{grad}\,p$.

如果 $\Omega$ 不是单连通的,对于它的每一个单连通子区域,应用上面的讨论即可. 证毕.

**推论 4.6.5** 按照 $H_0^1(\Omega)^n$ 的范数,零散度函数空间 $V_0$ 在 V 中是稠密的.

**证** 证明是根据 Banach 空间下述性质:

Banach 空间 M 的子空间 E 在 M 中稠密的充要条件是 M′ 中的每一个在 E 上为零的元素在 M 上也为零.

首先每一个在 $V_0$ 上为零的 $\mathbf{f}\in H^{-1}(\Omega)^n$ 在 V 上也为零.由定理 4.6.3,对某个 $p\in L^2(\Omega)$,$\mathbf{f}=\mathrm{grad}\ p$.但是由于 V 是 $H_0^1(\Omega)^n$ 闭子空间,V′可以和 $H^{-1}(\Omega)^n$ 的子空间等同,则从上面提到的 Banach 空间的性质可得到所需结果. 证毕.

迄今为止,我们的兴趣主要在 $H^1(\Omega)^n$ 的子空间上.相应地,使用一些正则性较弱的函数也是有意义的.为此,引入下面的空间:

$$H(\mathrm{div},\ \Omega)=\{\mathbf{v}\in L^2(\Omega)^n:\mathrm{div}\ \mathbf{v}\in L^2(\Omega)\},$$

显然,装配范数

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}=\{\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2+\|\mathrm{div}\ \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2\}^{1/2} \tag{4.6.14}$$

后,它是一个 Hilbert 空间,以及定义

$H_0(\mathrm{div},\Omega)$ 是 $\mathcal{D}(\Omega)^n$ 在空间 $H(\mathrm{div},\Omega)$中的闭包.

**定理 4.6.4** 设 $\Omega\subset R^n$ 是 Lipschitz 连续的开子集(不必是有界

的),则 $D(\bar{\Omega})^n$ 在 H(div,Ω)中稠密.这里 $D(\bar{\Omega})=\{\varphi|_\Omega:\ \varphi\in D(R^n)\}$(见定理 3.2.8).

**证** 证明是依据推论 4.6.5 中所引用的 Banach 空间的性质.设 $l\in(H(\mathrm{div},\Omega))'$ = H(div,Ω)的对偶空间.因为它是 Hilbert 空间,则存在由 $l$ 确定的函数 $l\in H(\mathrm{div},\Omega)$使得:

$$<l,\mathbf{u}> = \sum_{i=1}^{n}(l_i,u_i)+(l_{n+1},\mathrm{div}\mathbf{u})\quad \forall \mathbf{u}\in H(\mathrm{div},\Omega)$$

这里 $l_{n+1}=\mathrm{div}\ l$.

现在,设 $l$ 在 $D(\bar{\Omega})^n$ 上为零且记 $\tilde{l}_i$ 为 $l_i$ 在 Ω 外的零延拓.则上面的对偶对公式可改写为

$$\int_{R^n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\tilde{l}_i\varphi_i+\tilde{l}_{n+1}\mathrm{div}\Phi\right\}dx=0\quad \forall\Phi\in D(R^n)^n.$$

这就是说,在 $D(R^n)$上的广义函数的意义下,有 $\tilde{l}=\mathrm{grad}\ \tilde{l}_{n+1}$.因为 $\tilde{l}\in L^2(R^n)^n$,从而 $\tilde{l}_{n+1}\in H^1(R^n)$.那么由 $\tilde{l}_i$ 的定义有 $l_{n+1}\in H_0^1(\Omega)$.因为 $D(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密,对 $l_{n+1}$,在 $D(\Omega)$ 中存在序列 $\{\psi_\mu\}$,使得在 $H^1(\Omega)$ 中,有 $\lim\limits_{\mu\to\infty}\psi_\mu=l_{n+1}$,则

$$<l,\mathbf{u}> = \lim_{\mu\to\infty}\{(\mathrm{grad}\psi_\mu,\mathbf{u})+(\psi_\mu,\mathrm{div}\mathbf{u})\}=0$$

$$\forall\mathbf{u}\in H(\mathrm{div},\Omega).$$

从而,如果 $l$ 在 $D(\bar{\Omega})^n$ 上为零,则在 $H(div,\Omega)$ 上也为零,由此证得所需要的稠密性. 证毕.

下面的定理涉及到 H(div, Ω)中函数的边值法向分量.

**定理 4.6.5** 在 $D(\bar{\Omega})^n$ 上定义的映照 $\gamma_n$: $\mathbf{v}\to\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ 可以连续地延拓为由 H(div,Ω)到 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$的线性连续映照,仍记为 $\gamma_n$.

证 设 $\varphi \in D(\overline{\Omega}), v \in D(\overline{\Omega})^n$,下面的 Green 公式成立

$$(v, \text{grad}\varphi) + (\text{div} v, \varphi) = \int_{\partial\Omega} \varphi v \cdot n ds$$

因为 $D(\overline{\Omega})$在 $H^1(\Omega)$中稠密,上面的式子对 $\varphi \in H^1(\Omega), v \in D(\overline{\Omega})^n$ 也成立.从而有

$$\left|\int_{\partial\Omega} \varphi v \cdot n ds\right| \leqslant \|v\|_{H(\text{div},\Omega)} \|\varphi\|_{1,\Omega} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \forall v \in D(\overline{\Omega})^n.$$

现在$\forall \mu \in H^{1/2}(\partial\Omega)$,存在一个元素 $\varphi \in H^1(\Omega)$使得 $\varphi|_{\partial\Omega} = \mu$.从而由上面的不等式得

$$\left|\int_{\partial\Omega} \mu v \cdot n ds\right| \leqslant \|v\|_{H(\text{div},\Omega)} \|\mu\|_{1/2,\partial\Omega} \quad \forall \mu \in H^{1/2}(\partial\Omega), \forall v \in D(\overline{\Omega})^n.$$

则 $\|v \cdot n\|_{-1/2,\partial\Omega} \leqslant \|v\|_{H(\text{div},\Omega)}$.

因此,对于 $H(\text{div},\Omega)$的范数,$D(\overline{\Omega})^n$ 上定义的线性映照 $\gamma_n$: $v \to v \cdot n|_{\partial\Omega}$ 是连续的.因为 $D(\overline{\Omega})^n$ 在 $H(\text{div}, \Omega)$中是稠密的,$\gamma_n$ 可以连续地延拓为一个映照,仍记为 $\gamma_n \in L(H(\text{div},\Omega);\ H^{-1/2}(\partial\Omega))$,使得

$$\|\gamma_n\|_{L(H(\text{div},\Omega), H^{-1/2}(\partial\Omega))} \leqslant 1 \tag{4.6.15}$$

证毕.

通过延拓,$\gamma_n v$ 称为 $v$ 在 $\partial\Omega$ 上的法向分量,并简记为 $v \cdot n$.

由定理 4.6.4 和 4.6.5,我们推出下述 Green 公式

$$(v, \text{grad}\varphi) + (\text{div} v, \varphi) = \langle v \cdot n, \varphi \rangle_{\partial\Omega}$$
$$\forall v \in H(\text{div},\Omega) \quad \varphi \in H^1(\Omega). \tag{4.6.16}$$

作为一个推论,对于 Laplace 算子,可以把 Green 公式推广到值域更广的函数上.

**推论 4.6.6** 设 $u \in H^1(\Omega), \triangle u \in L^2(\Omega)$,则 $\partial u / \partial n \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 以及

$$(\text{grad} u,\ \text{grad} v) = -(\triangle u,\ v) + \langle \partial u / \partial n,\ v \rangle_{\partial\Omega}$$

$$\forall v \in H^1(\Omega). \tag{4.6.17}$$

下面两个结果给出了 $\gamma_n$ 更多的信息.

**推论 4.6.7** $R(\gamma_n)=H^{-1/2}(\partial\Omega)$以及

$\|\gamma_n\|_{L(H(\mathrm{div},\Omega),H^{-1/2}(\partial\Omega))} \leqslant 1$

**证** $\forall \mu\in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, 我们要找 $v\in H(\mathrm{div},\Omega)$, 使得在 $\partial\Omega$ 上 $v\cdot n=\mu$ 以及 $\|v\cdot n\|_{-1/2,\partial\Omega}\geqslant\|v\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}$,注意到(4.6.15),则有所需结论.为此考虑问题

求 $\varphi\in H^1(\Omega)$,使得

$-\triangle\varphi+\varphi=0$　　在 $\Omega$ 中

$\partial\varphi/\partial n=\mu$　　在 $\partial\Omega$ 上

容易证明,这个问题有唯一解 $\varphi\in H^1(\Omega)$,记 $v=\mathrm{grad}\varphi$,则 $v\in H(\mathrm{div},\Omega)$而且 $v\cdot n=\mu$,以及

$$\|\varphi\|_{1,\Omega}^2=<\mu,\varphi>_{\partial\Omega}\leqslant\|\mu\|_{-1/2,\partial\Omega}\|\varphi\|_{1,\Omega}$$

因为 div $v=\varphi$,有

$$\|v\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}\leqslant\|\mu\|_{-1/2,\partial\Omega}=\|v\cdot n\|_{-1/2,\partial\Omega}.$$

证毕.

**定理 4.6.6**

$$H_0(\mathrm{div},\Omega)=Ker(\gamma_n)=\{u\in H(\mathrm{div},\Omega):u\cdot n|_{\partial\Omega}=0\}$$

**证** 首先证明 $D(\Omega)^n$ 在 $Ker(\gamma_n)$中稠密,再利用推论 4.6.5 中所引用的 Banach 空间的性质得 $Ker(\gamma_n)\subset H_0(\mathrm{div},\Omega)$.设 $l\in(Ker(\gamma_n))'$,$I\in Ker(\gamma_n)$,它与 $l$ 的关系如下

$$<l,u>=\sum_{i=1}^{n}(l_i,u_i)+(l_{n+1},\mathrm{div}u)\quad\forall u\in Ker(\gamma_n) \tag{4.6.18}$$

现在设 $l$ 在 $D(\Omega)^n$ 上为零,由此得 $I=\mathrm{grad}\ l_{n+1}$.从而 $l_{n+1}\in H^1(\Omega)$,对(4.6.18)用 Green 公式(4.6.16)有

$$<l,u>=<u\cdot n,\ l_{n+1}>_{\partial\Omega}\quad\forall u\in Ker(\gamma_n)$$

因此 $l$ 在 $\mathrm{Ker}(\gamma_n)$ 上也为零.

而 $H_0(\mathrm{div},\Omega)\subset\mathrm{Ker}(\gamma_n)$ 则是 Green 公式(4.6.16)的直接推论. 证毕.

下面讨论 $H_0(\mathrm{div},\Omega)$ 的零散度函数子空间

$$H=\{u\in H_0(\mathrm{div},\Omega):\mathrm{div}u=0\}$$

因为它是 $L^2(\Omega)^n$ 的闭子空间,故有分解

$$L^2(\Omega)^n=H\oplus H^{\perp},$$

这里 $H^{\perp}$ 表示 H 在 $L^2(\Omega)^n$ 中关于内积$(\cdot,\cdot)$的正交补.下面的定理刻划了 $H^{\perp}$.

**定理 4.6.7** 如 $\Omega$ 是连通的,则有

$$H^{\perp}=\{\mathrm{grad}\ q:\ q\in H^1(\Omega)\}$$

**证** 记 $X=\{\mathrm{grad}\ q:\ q\in H^1(\Omega)\}$.首先注意到 X 是 $L^2(\Omega)^n$ 的闭子空间,从而如果我们证明了 $X^{\perp}=H$,就有 $H^{\perp}=(X^{\perp})^{\perp}=\overline{X}=X$,此即所要证的.

一方面,$\forall u\in H$,由 Green 公式(4.6.16)和定理 4.6.6 得 $(u,\mathrm{grad}q)=0\quad\forall q\in H^1(\Omega)$. 因此 $H\subset X^{\perp}$.

另一方面,$\forall u\in L^2(\Omega)^n$ 且 $(u,\ \mathrm{grad}\ q)=0,\forall q\in H^1(\Omega)$.在 $D(\Omega)$ 中取 $q$,就有 $\mathrm{div}u=0$,从而 $u\in H(\mathrm{div},\Omega)$.因此可以用 Green 公式(4.6.16)得出 $u\cdot n=0$,注意定理 4.6.6,有 $u\in H$.此即 $X^{\perp}\subset H$. 证毕.

**定理 4.6.8** 空间 $V_0$ 在 H 中稠密.

**证** 这是推论 4.6.5 中所引用的 Banach 空间性质的另一个应用.设 $l\in H'$,$I\in H$ 且

$$<l,u>=(I,u)\qquad\forall u\in H.$$

此时,如果 $l$ 在 $V_0$ 上为 0,函数 I 就满足定理 4.6.3 的假设,从而对某个 $p\in L^2(\Omega)$,有 $I=\mathrm{grad}p$ 因为 $I\in L^2(\Omega)^n$,故 $p\in H^1(\Omega)$.再由 Green 公式(4.6.16)得

$$<l,\mathbf{u}> = -(p,\mathrm{div}\mathbf{u}) + <\mathbf{u}\cdot\mathbf{n},p>_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall \mathbf{u}\in H.$$

证毕.

(二) 有关旋度算子的某些函数空间

在下面这一段中,除非有特别说明,空间的维数 n 是 2 或 3,$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是具有 Lipschitz 连续边界 $\partial\Omega$ 的有界区域.当 n=2 时,定义广义函数 $\varphi\in D'(\Omega),\mathbf{v}\in D'(\Omega)^2$ 的旋度算子为(在笛卡尔坐标系中)

$$\mathrm{curl}\ \varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right);\ \mathrm{curl}\ \mathbf{v} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

当 n=3 时,定义广义函数 $\mathbf{v}\in D'(\Omega)^3$ 的旋度为

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3},\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1},\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)$$

容易验证下列恒等式成立:

$$\mathrm{curl}(\mathrm{curl}\varphi) = -\triangle\varphi \qquad n=2$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{curl}(\mathrm{curl}\ \mathbf{v}) \\ \mathrm{curl}(\mathrm{curl}\ \mathbf{v})\end{array}\right\} = -\triangle\mathbf{v}+\mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{v}) \qquad \begin{array}{l}n=3\\ n=2\end{array}$$

注意二维向量场的旋度是一个标量,为了避免过多的记号,我们仍然约定按向量表示它,只要不发生混淆.

首先,我们推广经典的 Stokes 定理:如果 $\mathbf{f}\in(C^1(\Omega))^n$ 在 $\mathbf{R}$ 中的单连通域 $\Omega$ 上是无旋的,即旋度为 0,则 $\mathbf{f}$ 是一个梯度.

**定理 4.6.9** 假设 $\Omega$ 是单连通的.则 $\mathbf{u}\in L^2(\Omega)^n$ 在 $\Omega$ 中满足 $\mathrm{curl}\mathbf{u}=0$ 的充要条件是存在唯一的 $\hat{p}\in H^1(\Omega)/\mathbf{R}$,使得

$$\mathbf{u} = \mathrm{grad}\hat{p}.$$

证 证明类似于定理 4.6.3.我们首先证明对某个 $p\in L^2_{loc}(\Omega),\mathbf{u}=\mathrm{grad}p$.利用推论 4.6.2 再证明 $p\in L^2(\Omega)$,显然 $p\in H^1(\Omega)$ 并且在 $H^1(\Omega)/\mathbf{R}$ 中是唯一确定的.

这里我们可以找到单连通区域的 Lipschitz 连续的增序列开

集$\{O_m\}(m\geqslant 1)$,使得$\overline{O}_m\subset\Omega$ 以及 $\Omega=\bigcup_{m\geq 1}O_m$.

方法是正则化 u,使得它在 $O_m$ 上的限制是无旋的.这样对这些光滑函数就可以使用 Stokes 定理.

$\forall\varepsilon>0$,设 $\omega_\varepsilon\in D(R^n)$是正则化族,记$\tilde{u}$为 u 在 Ω 外为零的延拓,则有

$$\omega_\varepsilon*\tilde{u}\in D(R^n)^n,\text{且在 }L^2(R^n)^n\text{ 中}\lim_{\varepsilon\to 0}(\omega_\varepsilon*\tilde{u})=\tilde{u}$$

$$\operatorname{curl}(\omega_\varepsilon*\tilde{u})=\omega_\varepsilon*\operatorname{curl}\tilde{u}\tag{4.6.18}$$

但是如果 ε 充分小有.$\bigcup_{x\in O_m}B_\varepsilon(x)\subset\Omega$.这里 $B_\varepsilon(x)$是园心在 x、半经为 ε 的球,因此

$$\text{在}O_m\text{中},\operatorname{curl}(\omega_\varepsilon*\tilde{u})=0$$

而由 Stodes 定理知存在一个光滑函数 $p_\varepsilon$(至少属于 $H^1(O_m)$)使得在$O_m$ 中 $\omega_\varepsilon*\tilde{u}=\operatorname{grad}p_\varepsilon$.

又由(4.6.18)存在 $p_m\in H^1(O_m)$使得在$H^1(O_m)/R$ 中 ,$\lim_{\varepsilon\to 0}p_\varepsilon=p_m$ 以及在 $O_m$ 中,$u=\operatorname{grad}p_m$.证明的结束部分和定理 4.6.3 一样. 证毕.

利用定 4.6.7,可以给出 $H^\perp$的另一个特征.

**推论 4.6.8** 设 Ω 满足定理 4.6.9 中的假设,则在 $L^2(\Omega)^n$ 中下面的恒等式成立:

$$H^\perp=Ker(\operatorname{curl})=\{v\in L^2(\Omega)^n;\operatorname{curl}v=0\}.$$

作为这个推论的一个结论是只要 Ω 是有界的单连通域,如果 $u\in H$ 满足 curl $u=0$,则 $u=0$.

和定义 H(div,Ω)一样,我们引入空间

$$H(\mathrm{curl},\Omega)=\{\mathbf{v}\in L^2(\Omega)^n:\ \mathrm{curl}\ \mathbf{v}\in L^2(\Omega)^n\},$$

装配范数

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\mathrm{curl},\Omega)}=\{\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2+\|\mathrm{curl}\ \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2\}^{1/2},$$

它也是 Hilbert 空间,又记

$H_0(\mathrm{curl},\Omega)$是$D(\Omega)^n$在空间$H(\mathit{curl},\Omega)$中的闭包.

对于这些空间,我们同样可以得到与定理 4.6.4,4.6.5 和 4.6.6 相类似的结果.首先给出两个引理.

引理 4.6.3 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是 Lipschitz 连续的开子集(不必是有界的),则 $H(\mathrm{curl},\Omega)$中具有紧支集的函数集合在 $H(\mathrm{curl},\Omega)$中稠密.

证 利用截断函数的方法.设 $\mathbf{u}\in H(\mathrm{curl},\Omega)$以及 $\varphi\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$,使得在 $\mathbf{R}^n$ 中 $0\leqslant\varphi\leqslant1$,a.e.以及

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \forall\|x\|\leqslant1\\ 0 & \forall\|x\|\geqslant2\end{cases}$$

其次,$\forall a>0$,作变量替换 $\varphi_a(x)=\varphi(x/a)$.因为 $\varphi_a$ 是光滑的,$\varphi_a\mathbf{u}\in H(\mathrm{curl},\Omega)$,而且在 $H(\mathrm{curl},\Omega)$ 中 $\lim\limits_{a\to\infty}\varphi_a\mathbf{u}=\mathbf{u}$ 以及 $\mathrm{supp}(\varphi_a\mathbf{u})$ 是紧的,从而 $\varphi_a\mathbf{u}$ 就是所要的序列. 证毕.

引理 4.6.4 如果 $\mathbf{f}\in H(\mathrm{curl},\Omega)$满足

$$(\mathbf{f},\mathrm{curl}\Phi)-(\mathrm{curl}\ \mathbf{f},\Phi)=0\ \ \forall\Phi\in D(\overline{\Omega})^n,\tag{4.6.19}$$

则 $\mathbf{f}\in H_0(\mathrm{curl},\Omega)$.

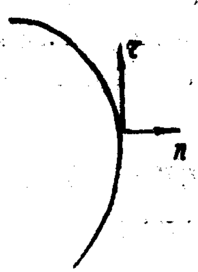
证 记$\tilde{\mathbf{f}}$是 $\mathbf{f}$ 在 $\Omega$ 外为零的延拓.首先由(4.6.19)知 $\tilde{\mathbf{f}}\in H(\mathrm{curl},\mathbf{R}^n)$,其次为了在 $D(\Omega)^n$ 中构造一个序列,使得它们在 $H(\mathrm{curl},\Omega)$中收敛于 $\mathbf{f}$,我们还要利用定理 4.6.3 所用过的正则化技术.

(1) 现在设 $\Omega$ 是严格星形域(见推论 4.6.2),构造变量替换: $\tilde{\mathbf{f}}_\theta(x)=\tilde{\mathbf{f}}(x/\theta)\quad\forall x\in\Omega_\theta=\theta\Omega$,但是此时,取 $\theta\in(0,1)$ 以便有 $\mathrm{supp}\tilde{\mathbf{f}}_\theta\subset\Omega$.显然,$\tilde{\mathbf{f}}_\theta\in H(\mathrm{curl},\mathbf{R}^n)$ 以及在 $H(\mathrm{curl},\mathbf{R}^n)$ 中

有 $\lim\limits_{\theta\to 1}\tilde{\mathbf{f}}_\theta=\tilde{\mathbf{f}}$. 从而，对于充分小的 $\varepsilon>0,\omega_\varepsilon*\tilde{\mathbf{f}}_\theta\in\mathrm{D}(\Omega)^n$ 以及在 $\mathrm{H}(\mathrm{curl},\Omega)$ 中．$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ \lim\limits_{\theta\to 1}(\omega_\varepsilon*\tilde{\mathbf{f}}_\theta)=\tilde{\mathbf{f}}$.

(2) 在一般情况下,存在 $\Omega$ 的有限开覆盖:
$\Omega\subset\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant q}O_i$, 使得 $\Omega_i=O_i\bigcap\Omega$ 是 *Lipschitz* 连续的有界的严格星形域，$1\leqslant i\leqslant q$. 设 $\{\alpha_i\}(i\geqslant 1)$ 是从属于开覆盖 $\{O_i\}$ $(i\geqslant 1)$ 的单位分解，即 $\alpha_i\in\mathrm{D}(O_i),0\leqslant\alpha_i(x)\leqslant 1,\sum\limits_{i=1}^{q}\alpha_i(x)=1$ (在 $\Omega$ 中). 因此在 $\mathrm{R}^n$ 中，有 $\tilde{\mathbf{f}}=\sum\limits_{i=1}^{q}\alpha_i\tilde{\mathbf{f}}$.

显然，$\alpha_i\tilde{\mathbf{f}}\in H(\mathrm{curl},\Omega),\mathrm{supp}(\alpha_i\tilde{\mathbf{f}})\subset\overline{\Omega}_i$. 因此对每一个 $\alpha_i\tilde{\mathbf{f}}$, 利用 (1) 的结论即可结束本定理的证明． 证毕．




**定理 4.6.10** 设 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$ 是 Lipschitz 连续的开子集(不必有界),则 $\mathrm{D}(\overline{\Omega})^n$ 在 $\mathrm{H}(\mathrm{curl},\Omega)$中稠密.

对定理 4.6.4 的证明稍加变动即得本定理结论.

现在我们准备定义 $\mathrm{H}(\mathrm{curl},\Omega)$中函数在 $\partial\Omega$ 上的切向迹.在 $\mathrm{n}=2$ 时,用 $\tau$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位切向量.如图所示,$\tau=(-\mathrm{n}_2,\mathrm{n}_1)$.

**定理 4.6.11** 在 $\mathrm{D}(\overline{\Omega})^n$ 上所定义的映照

$$\gamma_\tau:\ \mathbf{v}\to\mathbf{v}\cdot\tau|_{\partial\Omega}\qquad \mathrm{n}=2,$$

$$\gamma_\tau:\ \mathbf{v}\to\mathbf{v}\times\mathbf{n}|_{\partial\Omega}\qquad \mathrm{n}=3$$

可以连续地延拓为一个线性连续的映照,仍记为 $\gamma_\tau$: 当 $\mathrm{n}=2$ 时,$\gamma_\tau\in\mathrm{L}(\mathrm{H}(\mathrm{curl},\Omega),\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega))$.当 $\mathrm{n}=3$ 时,$\gamma_\tau\in\mathrm{L}(\mathrm{H}(\mathrm{curl},\Omega),\mathrm{H}^{-1/2}(\partial\Omega)^3)$.而且下列 Green 公式成立:

$$(\mathrm{curl}\mathbf{v},\Phi)-(\mathbf{v},\mathrm{curl}\Phi)=\langle\gamma_\tau\mathbf{v},\Phi\rangle_{\partial\Omega}\qquad(4.6.20)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{curl}, \Omega)$$

当 $n=3$ 时，$\forall \Phi \in H^1(\Omega)^3$ 或当 $n=2$ 时 .$\varphi \in H^1(\Omega)$.

此定理证明与定理 4.6.5 的类似.

为了不引入过多的符号,根据 n＝2 或 n＝3 我们用 $\mathbf{v}\cdot\tau|_{\partial\Omega}$ 或 $\mathbf{v}\times\tau|_{\partial\Omega}$ 表示 $\gamma_\tau \mathbf{v}$.

现在来考虑 H(curl,Ω)中 $\mathrm{Ker}(\gamma_\tau)$.

**定理 4.6.12** $\mathrm{Ker}(\gamma_\tau)=\mathrm{H}_0(\mathrm{curl},\Omega)$.

**证** 在(4.6.20)中取极限,显然 $\mathrm{H}_0(\mathrm{curl},\Omega)\subset\mathrm{Ker}(\gamma_\tau)$.反之,利用引理 4.6.4 即可. 证毕.

向量场 $\mathbf{v}$ 沿 $\partial\Omega$ 的切向分量定义为: $\mathbf{v}_T=\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$.显然 $\mathbf{v}_T\times\mathbf{n}=\mathbf{v}\times\mathbf{n}$.从而$\forall \mathbf{v}\in\mathrm{H}(\mathrm{curl},\Omega)$满足 $\mathbf{v}\times\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0$ 的充要条件是它的切向分量在 $\partial\Omega$ 上为零.类似地,$\forall q\in \mathrm{H}^1(\Omega)$满足$(\mathrm{grad}q)\times\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0$ 的充要条件是在 $\partial\Omega$ 的每一个连通域分量上 $q$ 是常数.

当 n＝2 时,$\mathbf{v}=(v_1,v_2)\in\mathrm{H}(\mathrm{curl},\Omega)$的充要条件是 $\mathbf{w}=(-v_2,v_1)\in\mathrm{H}(\mathrm{div},\Omega)$,而且 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{v}\cdot\tau$.从而在定理 4.6.4,4.6.5,4.6.6 和推论 4.6.7 中所叙述的 H(div,Ω)性质都可推广到 H(curl,Ω)上.

下面考察 $\mathrm{H}_0(\mathrm{div},\Omega)\cap\mathrm{H}_0(\mathrm{curl},\Omega)$.

**引理 4.6.5** 下面的等式在代数和拓扑的意义下成立:

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega)^n=\mathrm{H}_0(\mathrm{div},\Omega)\cap\mathrm{H}_0(\mathrm{curl},\Omega)$$

**证** 证明 n＝3 时的情况,n＝2 时完全类似.$\forall \mathbf{v}\in\mathrm{H}_0(\mathrm{div},\Omega)\cap\mathrm{H}_0(\mathrm{curl},\Omega)$,记$\tilde{\mathbf{v}}$是 $\mathbf{v}$ 的在 Ω 外为零的延拓.由 Green 公式(4.6.16)和(4.6.20),容易推出$\tilde{\mathbf{v}}\in\mathrm{H}(\mathrm{div},\mathbf{R}^3)\cap\mathrm{H}(\mathrm{curl},\mathbf{R}^3)$且

$$\|\mathrm{div}\ \tilde{\mathbf{v}}\|_{o,\mathbf{R}^3}=\|\mathrm{div}\mathbf{v}\|_{o,\Omega},$$

$$\|\mathrm{curl}\ \tilde{\mathbf{v}}\|_{o,\mathbf{R}^3}=\|\mathrm{curl}\ \mathbf{v}\|_{o,\Omega}$$

$$\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{o,\mathbf{R}^3}=\|\mathbf{v}\|_{o,\Omega}$$

令 $\mathrm{F}\tilde{\mathbf{v}}$ 是$\tilde{\mathbf{v}}$ 的 Fourier 变换，则由定理 1.9.4(Plancherel) 知 $\mathrm{F}\tilde{\mathbf{v}}\in\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^3)^3$，且 $\|\mathrm{F}\tilde{\mathbf{v}}\|_{o,\mathbf{R}^3}=(2\pi)^{3/2}\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{o,\mathbf{R}^3}$．以及

$$F(\operatorname{curl}\ \tilde{\mathbf{v}}) = i(\xi_2 F\tilde{v}_3 - \xi_3 F\tilde{v}_2, \xi_3 F\tilde{v}_1 - \xi_1 F\tilde{v}_3, \xi_1 F\tilde{v}_2 - \xi_2 F\tilde{v}_1)$$

$$F(\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}}) = i(\xi_1 F\tilde{v}_1 + \xi_2 F\tilde{v}_2 + \xi_3 F\tilde{v}_3).$$

从上面这两个关系可直接推得

$$\|F(\partial\tilde{v}_i / \partial x_j)\|^2_{0,\mathbf{R}^3} \leqslant \|\operatorname{div}\ \mathbf{v}\|^2_{0,\Omega} + \|\operatorname{curl}\ \mathbf{v}\|^2_{0,\Omega}$$

从而$\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}^1(\mathbf{R}^3)^3$,此即$\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)^3$.而且

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} = \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{1,\mathbf{R}^3} \leqslant c(\|\mathbf{v}\|^2_{0,\Omega} + \|\operatorname{div}\mathbf{v}\|^2_{0,\Omega} + \|\operatorname{curl}\ \mathbf{v}\|^2_{0,\Omega})^{1/2},$$

这里常数$c$与$\Omega$无关.

反向不等式和结论是显然的. 证毕.

下面是推论 4.6.5 的简单推论.

**推论 4.6.9** 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一开集,如果 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div},\Omega) \cap \mathbf{H}(\operatorname{curl},\Omega)$,则 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_{loc}(\Omega)^3$.

从推论 4.6.9 的证明中,同样可以得到

$$\mathbf{H}^1(\mathbf{R}^n)^n = \mathbf{H}(\operatorname{div},\mathbf{R}^n) \cap \mathbf{H}(\operatorname{curl},\mathbf{R}^n)$$

以及$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div},\Omega) \cap \mathbf{H}_0(\operatorname{curl},\Omega)$,有

$$|\mathbf{v}|_{1,\Omega} \leqslant c(\|\operatorname{div}\ \mathbf{v}\|^2_{0,\Omega} + \|\operatorname{curl}\ \mathbf{v}\|^2_{0,\Omega})^{1/2}.$$

## §4.7 向量场的分解

在前面，已经给出了两个直交分解：

$$L^2(\Omega)^n = H \oplus H^{\perp}; \qquad H_0^1(\Omega)^n = V \oplus V^{\perp}$$

现在,作为流函数的旋度空间，我们继续分析 H 和 V.特别地，要证明 $L^2(\Omega)^n$ 中每一个函数都是流函数的旋度和一个梯度的和.

设 Ω 是 L 型区域，它可以是单连通域，也可以是多连通域.用 $\partial\Omega_0$ 表示 Ω 的外边界.用 $\partial\Omega_i$，$1<i<p$，表示 ∂Ω 的其它分量 $H^{-1/2}(\partial\Omega_i)$和 $H^{1/2}(\partial\Omega_i)$ 的对偶对记为 $<\cdot,\cdot>_{\partial\Omega_i}$.这里 n=2 或 n=3.

(一) 二维向量场的分解

**定理 4.7.1** $\forall v \in L^2(\Omega)^2$ 满足

$$\operatorname{div} v = 0, \qquad <v\cdot n,\ 1>|_{\partial\Omega_i} = 0 \quad \forall 0 \leqslant i \leqslant p \qquad (4.7.1)$$

的充要条件是存在流函数$\varphi \in H^1(\Omega)$，使得

$$v = \operatorname{curl}\varphi \qquad (4.7.2)$$

证：充分性：$\forall\ \varphi \in H^1(\Omega)$，记 $v=\operatorname{curl}\varphi$，显然，$\operatorname{div} v=0$. 其次，还要证明 $<v\cdot n, 1>|_{\partial\Omega_i} = \int_{\partial\Omega_i} n\cdot \operatorname{curl}\varphi\, ds = \int_{\partial\Omega_i} \partial\varphi/\partial\tau\, ds = 0$，其中 τ 为 $\partial\Omega_i$ 单位切向量．显然，$\forall\ \varphi \in C_0^\infty(R^n,\Omega)$，$<v\cdot n,1>|_{\partial\Omega_i}=0$ 成立．由于 $C_0^\infty(R^n,\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中稠密，故上式对一切 $\varphi\in H^1(\Omega)$ 也成立．

必要性：若 v 满足 (4.7.1) .其思路是延拓 v 到全平面使得它仍然是零散度的，接着通过 Fourier 变换构造它的流函数.

(a) 我们构造一个延拓，这个延拓和 v 在 ∂Ω 上有相同的法向分量.

设 $O$ 是任意有界，光滑的单连通开集，而且$\overline{\Omega}\subset O$，如果 $p\geqslant 1$，集合 $O\setminus\overline{\Omega}$ 不是单连通的，我们用 $\Omega_i$ 表示边界为 $\partial\Omega_i$ 围成的区域 $(1\leqslant i\leqslant p)$. 而用 $\Omega_0$ 表示由 $\partial\Omega_0$ 和 $\partial O$ 所围

成的区域，考虑下述问题．

求在$O\setminus\bar{\Omega}$中定义的函数$w$，使得

$$(N)\quad\begin{cases}\triangle w=0 & 在O\setminus\bar{\Omega}中，\\ \dfrac{\partial w}{\partial n}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} & 在\partial\Omega_i上，0\leqslant i\leqslant p\\ \dfrac{\partial w}{\partial n}=0 & 在\partial O上.\end{cases}$$

这里 $\mathbf{n}$ 表示 $\partial\Omega_i$ 指向 $\Omega_i$ 内部的单位法向量($0<i<p$).问题 (N) 是由 p+1 个非齐次 Neumann 问题组成的，因为它们满足相容性条件

$$<\mathbf{v}\cdot\mathbf{n},\ 1>_{\partial\Omega_i}=0\qquad\forall\,0\leqslant i\leqslant p$$

从而存在着满足 $(N)$ 的函数 $w\in\mathbf{H}^1(O\setminus\bar{\Omega})$，在每个 $\Omega_i$ 上在相差一个可加常数意义下是唯一确定的．记 $\Psi=\mathrm{grad}w$，则 $\Psi\in\mathbf{H}$ (div，$O\setminus\bar{\Omega}$) 且

$$\begin{cases}\mathrm{div}\Psi=\triangle w=0 & 在O\setminus\bar{\Omega}中\\ \Psi\cdot\mathbf{n}=\dfrac{\partial w}{\partial\mathbf{n}}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} & 在\partial\Omega_i上，0\leqslant i\leqslant p\\ \Psi\cdot\mathbf{n}=0 & 在\partial O上\end{cases}\tag{4.7.3}$$

(b).现在按下面的方法延拓 $\mathbf{v}$

$$\tilde{\mathbf{v}}=\begin{cases}\mathbf{v} & 在\Omega中\\ \Psi & 在O\setminus\bar{\Omega}中\\ 0 & 在其它地方\end{cases}$$

显然，$\tilde{\mathbf{v}}\in\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)^2$. 作为广义函数，$\forall\,\varphi\in D(\mathbf{R}^2)$, 有

$$<\mathrm{div}\tilde{\mathbf{v}},\ \varphi>=-\int_{R^2}\tilde{\mathbf{v}}\cdot\mathrm{grad}\varphi dx$$

$$=-\int_{\Omega}\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\varphi dx-\sum_{i=0}^{p}\int_{\Omega_i}\Psi\cdot\mathrm{grad}\varphi dx$$

因为 $\mathbf{v}$ 和 $\Psi$ 的散度都是零,由 Green 公式和(4.7.3)有

$$<\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}},\ \varphi> = -<\mathbf{v}\cdot\mathbf{n},\varphi>_{\partial\Omega} - \sum_{i=0}^{p}<\mathbf{v}\cdot\mathbf{n},\varphi>_{\partial\Omega_i}$$

在此式中，$\partial\Omega_i$ 的法线方向是指向 $\Omega_i$ 的外部，即 $\Omega$ 的内部，因此整个和式抵销了 $<\mathbf{v}\cdot\mathbf{n},\ \varphi>_{\partial\Omega}$，有 $<\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}},\ \varphi> = 0, \forall\varphi \in D(\mathbf{R}^2)$，即 $\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}} = 0$.

(*c*) 因为 $\operatorname{supp}\tilde{\mathbf{v}}$ 是紧的，它的 Fourier 变换 $(F\tilde{\mathbf{v}})(\xi)$ 是 $\xi$ 的整函数．由 Fourier 变换的性质，条件 $\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}} = 0$ 和 $\tilde{\mathbf{v}} = \operatorname{curl}\varphi$ 可写为

$$\xi_1 F\tilde{v}_1 + \xi_2 F\tilde{v}_2 = 0 \tag{4.7.4}$$

$$F\tilde{v}_1 = i\xi_2 F\varphi \qquad F\tilde{v}_2 = -i\xi_1 F\varphi \tag{4.7.5}$$

如果取 $F\varphi = F\tilde{v}_1 / (i\xi_2)$，由 (4.7.4)，则 (4.7.5) 中两个式子变为

$$F\varphi = F\tilde{v}_1 / (i\xi_2) = -F\tilde{v}_2 / (i\xi_1)$$

因此只要 $F\varphi \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$，$F\varphi$ 的逆变换就是所要找的流函数 $\tilde{\mathbf{v}}$. 但是因为 $F\tilde{v}_j \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^2)$，只要证明在原点的邻域里 $F\varphi$ 是有界的即可．

根据 (4.7.4)，有 $F\tilde{v}_1(\xi_1,\ 0) = 0$，从而由 $F\tilde{v}_1$ 的齐次性，有

$$F\tilde{v}_1(\xi_1,\ \xi_2) = \xi_2(\partial F\tilde{v}_1(\xi_1,\ 0) / \partial\xi_2) + O(|\xi_2|^2),$$

因此

$$F\varphi(\xi_1,\ \xi_2) = -i(\partial F\tilde{v}_1(\xi_1,\ 0) / \partial\xi_2) + O(|\xi_2|)$$

此即 $F\varphi$ 在原点的邻域内是有界的. 证毕

作为这个定理的推论，有：如果 $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^s(\Omega)^2$，$s \geqslant 2$（相应地 $H^m(\Omega)^2$，$m \geqslant 0$），且 $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$，$<\mathbf{v}\cdot\mathbf{n},\ 1>_{\partial\Omega_i} = 0$，$0 \leqslant i \leqslant p$，则

$$\mathbf{v} = \operatorname{curl}\varphi, \qquad \varphi \in \mathbf{H}^{1,s}(\Omega)(\text{相应地}\varphi \in \mathbf{H}^{m+1}(\Omega))$$

注意，因为 $\Omega$ 是连通域，$\mathbf{v}$ 的流函数 $\varphi$ 在相差一个可加常数的意义下是唯一确定的，特别当 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}$ 时，它的流函数 $\varphi$ 满足 $(\partial\varphi / \partial\tau)_{\partial\Omega_i} = 0$，即

$$\varphi|_{\partial\Omega_i} = c_i \quad , \qquad 0 \leqslant i \leqslant p$$

从而，如果取定这些常数中的一个，$\varphi$ 就可唯一确定．例如，$\mathbf{v}$ 只有一个在 $\partial\Omega_0$ 上为零的流函数．这个函数属于空间

$$\Phi = \{x \in \mathbf{H}^1(\Omega): x|_{\partial\Omega_0} = 0,\ x|_{\partial\Omega_i} = \text{任意常数}, 1 \leqslant i \leqslant p\} \quad (4.7.6)$$

它是 $\mathbf{H}^1(\Omega)$ 的闭子空间，而且在 $\Phi$ 上 $|\cdot|_{1,\Omega}$ 和 $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ 等价．利用广义 Poincare 定理（§3.6）容易证明这点，而该定理本身又是定理 4.6.1 中 (2) 的简单推论．

**引理 4.7.1** 设 $\Gamma_0$ 是边界 $\partial\Omega$ 的具有严格正测度的部分，则 $\forall p > 0$，在空间 $\{v \in \mathbf{H}^{1,p}(\Omega); v|_{\Gamma_0} = 0\}$ 上，$|\cdot|_{1,p,\Omega}$ 和 $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$ 是等价范数．

由定理 4.7.1 和引理 4.7.1 推得，$\Phi$ 中的某些函数可从作为一个边值问题的解．

**推论 4.7.1** 空间 $\mathbf{H}$ 满足

$$\mathbf{H} = \{\text{curl}\varphi : \varphi \in \Phi\}$$

且映照 curl 是由 $\Phi$ 到 $\mathbf{H}$ 上的同构．此外，$\mathbf{v}$ 的流函数 $\varphi$ 是问题

$$\varphi \in \Phi, (\text{curl}\varphi, \text{curl}x) = (\mathbf{v}, \text{curl}x) \quad \forall x \in \Phi \qquad (4.7.7)$$

的解．

问题(4.7.7)对应下述微分方程

$$\begin{cases} -\triangle\varphi = \text{curl}\mathbf{v} & \text{在}\mathcal{D}'(\Omega)\text{中} \\ \varphi|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \varphi|_{\partial\Omega_i} = c_i & \\ < \partial\varphi / \partial\mathbf{n} + \mathbf{v}\cdot\tau, 1 >_{\partial\Omega_i} = 0 & 1 \leqslant i \leqslant p \end{cases}$$

事实上，取检验函数 $x \in \mathcal{D}(\Omega)$，即得第一个方程．为了推出最后一个在 $\partial\Omega_i$ 上的边界条件，只要注意 (4.6.17)，形式上有

$$(\text{curl}\varphi, \text{curl}x) = -(\triangle\varphi, x) + (\partial\varphi/\partial\mathbf{n}, x)_{\partial\Omega} \ \forall x \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

类似地，(4.6.20)形式上给出

$$(\mathbf{v}, \text{curl}x) = (\text{curl}\mathbf{v}, x) - (\mathbf{v}\cdot\tau, x>_{\partial\Omega} \ \forall x \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

上述二述与(4.7.7)比较，得

$$\sum_{i=1}^{p} < \partial\varphi / \partial \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, c_i >_{\partial\Omega_i} = 0 \quad \forall c_i \in \mathbf{R}$$

定理 4.7.1 及推论 4.7.1 给出了 $\mathbf{L}^2(\Omega)^2$ 的正交分解.

**定理4.7.2** $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)^2$,有下述正交分解.

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad} q + \mathrm{curl} \varphi \tag{4.7.8}$$

这里$q \in \mathbf{H}^1(\Omega) / \mathbf{R}$是边值问题

$$(\mathrm{grad} q, \mathrm{grad} \mu) = (\mathbf{v}, \mathrm{grad} \mu) \quad \forall \mu \in \mathbf{H}^1(\Omega) \tag{4.7.9}$$

的解,而$\varphi \in \Phi$是边值问题

$$(\mathrm{curl} \varphi, \mathrm{curl} x) = (\mathbf{v} - \mathrm{grad} q, \mathrm{curl} x) \quad \forall x \in \Phi \tag{4.7.10}$$

的解.

**证** $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)^2$, Neumann 问题 (4.7.9) 有唯一解 $q \in \mathbf{H}^1(\Omega) / \mathbf{R}$, 在 $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ 中, $q$ 满足 $\triangle q = \mathrm{div} \mathbf{v}$. 因而 $\mathbf{v} - \mathrm{grad} q$ 是 $\mathbf{H}(\mathrm{div}, \Omega)$ 中零散度向量, 对 (4.7.9) 应用 Green 公式, 有

$$0 = (\mathbf{v} - \mathrm{grad} q, \mathrm{grad} \mu) = \, < (\mathbf{v} - \mathrm{grad} q) \cdot \mathbf{n}, \mu >_{\partial\Omega} \quad \forall \mu \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

即在 $\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ 中, $(\mathbf{v} - \mathrm{grad} q) \cdot \mathbf{n} = 0$. 换而言之, $\mathbf{v} - \mathrm{grad} q \in \mathbf{H}$, 从而由推论 4.7.1 知存在唯一 $\varphi \in \Phi$, 满足 (4.7.8) 和 (4.7.10). 证毕.

用这里的方法可以把引理 4.6.2 推广到更光滑的函数上.

**引理 4.7.2** 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是有界连通域, 其边界 $\partial\Omega$ 是 $C^{m,1} (m \geqslant 2)$ 类的, $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{m-1/2}(\partial\Omega)^2$, 且

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

则存在$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{g}) \in \mathbf{H}^m(\Omega)^2$,使得

$$\mathrm{div} \mathbf{u} = 0 \quad 在\Omega中, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \quad 在\partial\Omega上$$

并且

$$\|\mathbf{u}\|_{m,\Omega} \leqslant c \|\mathbf{g}\|_{m-1/2,\partial\Omega}$$

**证** 在 $\partial\Omega$ 上 $\mathbf{u}=\mathbf{g}$ 的条件可以分解为在 $\partial\Omega$ 上 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{g}\cdot\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{u}\cdot\tau=\mathbf{g}\cdot\tau$. 因为分别规定每一个条件更简单，所以设 $\mathbf{u}=\mathrm{grad}q+\mathrm{curl}\varphi$. 这里 $q$ 是下列 Neumann 问题的唯一解（最多相差一个可加常数）

$$\begin{cases}\Delta q=0 & \text{在}\Omega\text{中}\\ \partial q/\partial\mathbf{n}=\mathbf{g}\cdot\mathbf{n} & \text{在}\partial\Omega\text{上}\end{cases}$$

而 $\varphi$ 是双调和方程

$$\begin{cases}\Delta^2\varphi=0 & \text{在}\Omega\text{中}\\ \varphi=0 & \text{在}\partial\Omega\text{上}\\ \partial\varphi/\partial\mathbf{n}=\partial\mathbf{g}/\partial\tau-\mathbf{g}\cdot\tau & \text{在}\partial\Omega\text{上}\end{cases}$$

的唯一解,容易验证 $\mathbf{u}$ 满足引理的结论,证毕.

现在，考察空间 V, 由定理 4.7.1 知 $\forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, 有一个流函数 $\varphi\in\mathbf{H}^1(\Omega)$. 即 $\mathbf{v}=\mathrm{curl}\varphi$. 同时，如果固定 $\varphi|_{\partial\Omega_0}=0$, 则 $\varphi$ 也是唯一确定的，容易验证 $\varphi$ 属于空间

$$\Psi=\{x\in\mathbf{H}^2(\Omega):x|_{\partial\Omega_0}=0;\ x|_{\partial\Omega_i}=\text{常数},\ 0\leqslant i\leqslant p,$$

$$\partial x/\partial\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0\} \tag{4.7.11}$$

$\Psi$ 上的半范 $\|\Delta\varphi\|_{0,\Omega}$ 等价于全范 $\|\varphi\|_{2,\Omega}$. 事实上，当 $\varphi\in\Psi$ 时，$\mathrm{grad}\varphi\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)^2$, 由广义 Poincaré 定理（见 §3.6）可得

$$\|\Delta\varphi\|_{0,\Omega}=\|\varphi\|_{2,\Omega}\geqslant c_1|\varphi|_{1,\Omega}\geqslant c_2\|\varphi\|_{0,\Omega} \tag{4.7.12}$$

类似于推论 4.7.1,有

**推论 4.7.2** 空间 V 满足

$$\mathbf{V}=\{\mathrm{curl}\varphi:\varphi\in\Psi\},$$

且映射 curl 是由 $\Psi$ 到 V 上的同构,而 $\mathbf{v}$ 的流函数也可作为问题

$$\varphi\in\Psi,(\triangle\varphi,\triangle\chi)=-(\mathrm{curl}\mathbf{v},\triangle\chi)\quad\forall\chi\in\Psi\tag{4.7.13}$$

的解.

问题(4.7.13)可以解释为下列微分方程:

$$\begin{cases}\triangle^2\varphi=-\triangle(\mathrm{curl}\mathbf{v}) & 在H^{-2}(\Omega)中\\ \varphi|_{\partial\Omega_0}=0\ ,\ \varphi|_{\partial\Omega_i}=c_i & \forall 1\leqslant i\leqslant p\\ \partial\varphi/\partial\mathbf{n}=0 & 在\partial\Omega上\\ \int_{\partial\Omega_i}\partial(\triangle\varphi+\mathrm{curl}\mathbf{v})/\partial\mathbf{n}\ ds=0 & \forall 1\leqslant i\leqslant p\end{cases}\tag{4.7.14}$$

事实上,取 $\chi\in\mathbf{D}(\Omega)$就可得(4.7.14)中第一式,然后取它与 $\chi\in\Psi$ 的数积,分部积分并与(4.7.13)比较:就有

$$<\partial(\triangle\varphi+\mathrm{curl}\mathbf{v})/\partial\mathbf{n},\chi>_{\partial\Omega}=0\qquad\forall\chi\in\Psi$$

以及

$$\int_{\partial\Omega_i}\partial(\triangle\varphi+\mathrm{curl}\mathbf{v})/\partial\mathbf{n}\ ds=0\quad\forall 1\leqslant i\leqslant p$$

**定理 4.7.3** $\mathbf{H}_0^1(\Omega)^2$ 中每一个元素 $\mathbf{v}$ 有如下正交分解:

$$\mathbf{v}=(-\triangle)^{-1}\mathrm{grad}q+\mathrm{curl}\varphi\tag{4.7.15}$$

这里$\varphi\in\Psi$是问题(4.7.13)的解,且$q\in\mathbf{L}_0^2(\Omega)$是唯一的.

**证** 由推论 4.6.3 和定理 4.7.2 可得(4.7.15).因此,只须检验 $\varphi$ 满足(4.7.13).由(4.7.15)有

$$\mathrm{curl}\mathbf{v}=-\triangle\varphi+\mathrm{curl}(-\triangle)^{-1}\mathrm{grad}q$$

则$\forall\ \mathbf{w}\in\mathbf{V}_0$,上式两端同乘以$\mathrm{curl}\mathbf{w}$,得

$$\begin{aligned}(\mathrm{curl}\mathbf{v},\mathrm{curl}\mathbf{w})&=(-\triangle\varphi,\mathrm{curl}\mathbf{w})+(\mathrm{curl}(-\triangle)^{-1}\mathrm{grad}q,\mathrm{curl}\mathbf{w})\\&=(-\triangle\varphi,\mathrm{curl}\mathbf{w})+((-\triangle)^{-1}\mathrm{grad}q,\mathrm{curl}(\mathrm{curl}\mathbf{w}))\end{aligned}$$

$$= (-\triangle\varphi,\mathrm{curl}\mathbf{w}) + ((-\triangle)^{-1}\mathrm{grad}q, -\triangle\mathbf{w}).$$

由$\mathrm{div}\mathbf{w}=0$,有

$$(\mathrm{curl}\mathbf{v},\mathrm{curl}\mathbf{w}) = (-\triangle\varphi,\mathrm{curl}\mathbf{w}) + (\mathrm{grad}q,\mathbf{w})$$
$$= (-\triangle\varphi,\mathrm{curl}\mathbf{w}) \qquad \forall\, \mathbf{w}\in \mathbf{V}_0$$

因为$\mathbf{V}_0$在$\mathbf{V}$中稠密,则有

$$(-\triangle\varphi,\mathrm{curl}\mathbf{w}) = (\mathrm{curl}\mathbf{v},\mathrm{curl}\mathbf{w}) \quad \forall\, \mathbf{w}\in\mathbf{V}$$

此式与(4.7.13)等价. 证毕.

在引理 4.6.5 中,已经得出 $\mathbf{H}_0(\mathrm{div},\Omega)\cap\mathbf{H}_0(\mathrm{curl},\Omega)$ 中的函数属于 $H_0^1(\Omega)^n$ 以及 $\mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega)\cap\mathbf{H}(\mathrm{curl},\Omega)$ 中的函数局部地属于 $H^1(\Omega)^n$. 然而,实际中,我们常常遇到下述情况. 为此,令

$$\mathbf{U} = \mathbf{H}_0(\mathrm{div},\Omega)\cap\mathbf{H}(\mathrm{curl},\Omega), \quad \mathbf{W} = \mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega)\cap\mathbf{H}_0(\mathrm{curl},\Omega)$$

这里设 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是连通的有界开集.

**命题 4.7.1** 如果 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,1}$ 类或是不带内凹角的分片光滑的,则 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{W}$ 是代数和拓扑地包含在 $H^1(\Omega)^2$ 中.

**证** (1) $\forall\, \mathbf{v}\in\mathbf{U}$,根据定理 4.7.2,有

$$\mathbf{v} = \mathrm{grad}q + \mathrm{curl}\varphi \tag{4.7.8}$$

这里在相差一个可加常数的意义下,$q$是齐次Neumann问题

$$\begin{cases} \triangle q = \mathrm{div}\mathbf{v} & \text{在}\Omega\text{中} \\ \partial q/\partial n = 0 & \text{在}\partial\Omega\text{上} \end{cases} \tag{4.7.16}$$

的解,而$\varphi$是非齐次Dirichlet问题

$$\begin{cases} -\triangle\varphi = \mathrm{curl}\mathbf{v} & \text{在}\Omega\text{中} \\ \varphi|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \varphi|_{\partial\Omega_l} = c_l \end{cases} \tag{4.7.17}$$

的解,其中常数 $c_l$ 由 (4.7.10) 确定. 因为 $\mathrm{div}\mathbf{v}$ 和 $\mathrm{curl}\mathbf{v}$ 都在 $L^2(\Omega)$ 中,又由对边界 $\partial\Omega$ 的假定,以及由 Poisson 方程

的 Dirichlet 问题和 Neumann 问题解的正则性定理，可以推出 $q$ 和 $\varphi$ 都属于 $H^2(\Omega)$，且

$$\begin{cases} \|q\|_{2,\Omega} \leqslant C_1 \|\mathrm{div}\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \\ \|\varphi\|_{2,\Omega} \leqslant C_1(\|\mathrm{curl}\mathbf{v}\|_{0,\Omega} + \|\gamma_0 \varphi\|_{3/2,\partial\Omega}) \end{cases} \tag{4.7.18}$$

又因$\varphi$在$\partial\Omega_0$上为零，而在$\partial\Omega_i$上为常数，故

$$\|\gamma_0 \varphi\|_{3/2,\partial\Omega} \leqslant C_3 \|\varphi\|_{1,\Omega} \leqslant C_4 |\varphi|_{1,\Omega}$$

根据(4.7.8)和(4.7.9)，还有

$$|\varphi|_{1,\Omega} \leqslant \|\mathbf{v} - \mathrm{grad}q\|_{0,\Omega} \leqslant \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}$$

综合上述不等式，并代入(4.7.7)，有$\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2$且

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leqslant C_5(\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} + \|\mathrm{div}\mathbf{v}\|_{0,\Omega} + \|\mathrm{curl}\mathbf{v}\|_{0,\Omega}) \tag{4.7.19}$$

(2) 设 $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$，记 $\mathbf{v} = (-u_2, u_1)$，那么 $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$，且 $\mathrm{div}\mathbf{v} = -\mathrm{curl}\mathbf{u}$，$\mathrm{curl}\mathbf{v} = \mathrm{div}\mathbf{u}$ 以及 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{u} \cdot \tau$。因此，由 (1) 可知 $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2$，同时满足估计式 (4.7.19)。即有 $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2$ 且

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leqslant C_5(\|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} + \|\mathrm{curl}\mathbf{u}\|_{0,\Omega} + \|\mathrm{div}\mathbf{u}\|_{0,\Omega}) \tag{4.7.20}$$

证毕.

尤其令人感兴趣的是，如果 $\Omega$ 是单连通的，由 (4.7.18) 可知，在 $\mathbf{U}$ 中范数 $\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}$ 与范数 $\|\mathrm{div}\mathbf{v}\|_{0,\Omega} + \|\mathrm{curl}\mathbf{v}\|_{0,\Omega}$ 是等价的.

(二) 三维向量场的分解

**定理 4.7.4** $\forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3$ 满足

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \quad \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\partial\Omega_i} = 0, \quad \forall 0 \leqslant i \leqslant p \tag{4.7.21}$$

的充要条件是存在向量位势 $\Phi \in H^1(\Omega)^3$，使得 $\mathbf{v} = \mathrm{curl}\Phi$ 并且 $\mathrm{div}\Phi = 0$.

**证** $\forall \Phi \in H^1(\Omega)^3$，$\mathbf{v} = \mathrm{curl}\Phi$，则 $\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$. 我们必须检验 $\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\partial\Omega_i} = 0, \forall 0 \leqslant i \leqslant p$. 设 $\chi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ 且在 $\mathbb{R}^3$ 中满足 $0 \leqslant \chi_i(x) \leqslant 1$，而在 $\partial\Omega_j$ 的邻域内有 $\chi_i(x) = \delta_{ij}$，记 $\mathbf{w}_i = \mathrm{curl}(\chi_i \Phi)$. 显然，$\mathbf{w} \in L^2(\Omega)^3$，$\mathrm{div}\mathbf{w}_i = 0$. 而且 $\forall i \neq j$ 时，$\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_j} = 0$，$\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_i} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_i}$，从而

$$< \mathbf{v}\cdot\mathbf{n},1>|_{\partial\Omega_l} = < \mathbf{w}_l\cdot\mathbf{n},1>_{\partial\Omega} = \int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{w}_l dx = 0$$

$$\forall \quad 0\leqslant l\leqslant p. \tag{4.7.22}$$

反之，设 $\mathbf{v}\in\mathbf{L}^2(\Omega)^3$ 且满足(4.7.1)，和二维情况一样，把 $\mathbf{v}$ 延拓到整个空间，使得被延拓的函数 $\tilde{\mathbf{v}}\in\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)^3$，$\mathrm{div}\tilde{\mathbf{v}}=0$ 以及 $\mathrm{supp}\tilde{\mathbf{v}}$ 是紧的，同样，$\tilde{\mathbf{v}}$ 的Fourier变换 $F\tilde{\mathbf{v}}$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中是整函数，因为 $\mathrm{supp}\tilde{\mathbf{v}}$ 是紧的，根据 Fourier 变换的性质，$\mathrm{div}\tilde{\mathbf{v}}=0$，和 $\tilde{\mathbf{v}}=\mathrm{curl}\Phi$ 分别变为

$$\sum_{i=1}^{3}\xi_i F\tilde{v}_i = 0 \tag{4.7.23}$$

$$F\tilde{\mathbf{v}} = i(\xi_2F\varphi_3-\xi_3F\varphi_2,$$
$$\xi_3F\varphi_1-\xi_1F\varphi_3,\xi_1F\varphi_2-\xi_2F\varphi_1) \tag{4.7.24}$$

如果(4.7.23)成立，则(4.7.24)和下式

$$\sum_{i=1}^{3}\xi_i F\varphi_i = 0 \tag{4.7.25}$$

唯一地确定 $F\Phi$.(4.7.23),(4.7.24)和(4.7.25)的唯一的解是

$$F\Phi = i(\xi_2F\tilde{v}_3-\xi_3F\tilde{v}_2,\xi_3F\tilde{v}_1-\xi_1F\tilde{v}_3,$$
$$\xi_1F\tilde{v}_2-\xi_2F\tilde{v}_1)/\|\Xi\|^2$$

其中 $\Xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，这表明 $\xi_j F\varphi_i\in\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$ 以及

$$|F\varphi_i|\leqslant(|F\tilde{v}_j|+|F\tilde{v}_k|)/\|\Xi\|$$

只要 $F\Phi$ 在原点处有界，则 $F\Phi$ 的逆变换是属于 $\mathbf{H}^1(\Omega)^3$ 的．注意到(4.7.23)可得 $F\tilde{\mathbf{v}}(0)=0$. 又因 $F\tilde{\mathbf{v}}$ 是整函数，在原点的邻域内有

$$F\tilde{\mathbf{v}}(\xi) = \sum_{j=1}^{3}\xi_j(\partial F\tilde{\mathbf{v}}(0)/\partial\xi_j)+O(\|\Xi\|^2)$$

因此，当 $\Xi\to 0$ 时，$F\Phi$ 是有界的.

把 $F\Phi$ 的逆变换 $\Phi$ 限制在 $\Omega$ 上,可得到函数 $\Phi\in \mathbf{H}^1(\Omega)^3$,使得 $\mathbf{v}=\mathrm{curl}\Phi$ 以及 $\mathrm{div}\Phi=0$.证毕.

上面的结构表明,总可以选出零散度位势向量,但选法并不是唯一的,例如,在(4.7.25)中,可以置 $F\varphi_3=0$,连同(4.7.23),(4.7.24),有唯一的解

$$F\varphi_1=F\tilde{v}_2/(i\xi_3),\quad F\varphi_2=-F\tilde{v}_1/(i\xi_3),\quad F\varphi_3=0.$$

$\mathbf{v}$ 的相应的位势向量 $\Phi$ 为 $(\varphi_1,\varphi_2,0)$.

在 $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)^3$ 中,$\mathbf{v}$ 的每一个零散度位势向量 $\Phi$ 满足

$$-\triangle\Phi=\mathrm{curl}\mathbf{v}$$

**定理 4.7.5** 如果 $\mathbf{v}\in \mathbf{L}^2(\Omega)^3$ 满足(4.7.22)以及 $\mathrm{curl}\mathbf{v}=0,\mathbf{v}\times\mathbf{n}|_{\partial\Omega}=0$,则 $\mathbf{v}=0$.

**推论 4.7.3** $\forall\ \mathbf{v}\in\mathbf{H}^1(\Omega)^3$ 且满足(4.7.22),则它有一个零散度向量 $\Phi\in\mathbf{H}^2(\Omega)^3$,使得 $\mathbf{v}=\mathrm{curl}\Phi,\mathrm{div}\Phi=0$.

**定理 4.7.6** (1) 设 $\mathbf{v}\in \mathbf{L}^2(\Omega)^3$ 满足(4.7.22),其向量位势 $\Phi$ 满足

$$\mathrm{curl}\Phi=\mathbf{v}\ ,\quad \mathrm{div}\Phi=0 \tag{4.7.26}$$

则可以选取 $\Phi\in\mathbf{H}(\mathrm{curl};\Omega)$,使得

$$\Phi\cdot\mathbf{n}=0 \tag{4.7.27}$$

而且如果 $\Omega$ 是单连通的,则 $\Phi$ 由(4.7.26)和(4.7.27)唯一确定,它是下述边值问题唯一解:

$$\begin{cases}\Phi\in\mathbf{H}^* \\ -\triangle\Phi=\mathrm{curl}\mathbf{v} & \text{在}\mathbf{H}^{-1}(\Omega)^3\text{中} \\ (\mathrm{curl}\Phi-\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}=0 & \text{在}\partial\Omega\text{上}\end{cases} \tag{4.7.28}$$

(2) 如果 $\partial\Omega$ 是光滑的,即如 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,1}$ 类,则 $\Phi\in\mathbf{H}^1(\Omega)^3$.

**证** (1) 由定理 4.7.5,存在 $\Phi\in\mathbf{H}^1(\Omega)^3$,满足(4.7.26).从而,如果能找到 $\Psi\in\mathbf{H}(\mathrm{curl},\Omega)$,使得

$$\begin{cases} \text{curl}\Psi = 0,\ \text{div}\Psi = 0 & \text{在}\Omega\text{中} \\ \Psi \cdot \mathbf{n} = \Phi \cdot \mathbf{n} & \text{在}\partial\Omega\text{上} \end{cases} \tag{4.7.29}$$

则差 $\Phi-\Psi$ 就是所求的函数.

设 $\chi \in H^1(\Omega)/R$ 是非齐次 Neumann 问题

$$\begin{cases} \triangle\chi = 0 & \text{在}\Omega\text{中} \\ \partial\chi/\partial\mathbf{n} = \Phi \cdot \mathbf{n} & \text{在}\partial\Omega\text{上} \end{cases} \tag{4.7.30}$$

的解,则 $\Psi = \text{grad}\,\chi$ 满足(4.7.29)且 $\Psi \in H(\text{curl},\Omega)$.

如果 $\Omega$ 是单连通的,则 $\Phi$ 显然是唯一的,此外 $\Phi$ 还满足(4.7.28).反之(4.7.28)最多有一个解,因为如果(4.7.28)成立且 $\mathbf{v}=0$,则一方面 $\text{curl}\Phi \in H$,另一方面 $\text{curl}\Phi \in \text{Ker}(\text{curl})$ 从而 $\text{curl}\Phi = 0$.又因 $\Phi \in H$,则 $\Phi = 0$.

(2) 如果 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,1}$ 类的,则 $\Phi \cdot \mathbf{n} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.由此得 $\chi \in H^2(\Omega)$ 以及 $\text{grad}\,\chi \in H^1(\Omega)^3$.证毕.

**定理 4.7.7** (1) 每一个满足(4.7.22)的 $L^2(\Omega)^3$ 中的函数,最多有一个零散度向量位势 $\Phi \in H(\text{curl},\Omega)$,满足

$$\Phi \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{在}\partial\Omega\text{上}, \langle \Phi \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\partial\Omega_i} = 0 \quad 0 \leqslant i \leqslant p \tag{4.7.31}$$

(2) 如果 $\Omega$ 是单连通域,每一个 $\mathbf{v} \in H$ 只有一个零散度向量位势 $\Phi \in H(\text{curl},\Omega)$ 且满足(4.7.31),它还是下述边值问题的解:

$$\begin{cases} -\triangle\Phi = \text{curl}\mathbf{v} & \text{在}H^{-1}(\Omega)^3\text{中} \\ \text{div}\Phi = 0 & \text{在}\Omega\text{中} \\ \Phi\text{满足(4.7.31)} \end{cases} \tag{4.7.32}$$

(3) 除了假设(1).(2)外,如果 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,1}$ 类的或 $\Omega$ 是凸多面体区域,则向量位势 $\Phi \in H^1(\Omega)^3$.

**证** (1) 用反证法.设 $\Phi \in H(\text{curl},\Omega)$ 满足在 $\Omega$ 中 $\text{curl}\Phi = 0, \text{div}\Phi = 0$;在 $\partial\Omega$ 上,$\Phi \times \mathbf{n} = 0$ 以及 $\langle \Phi \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\partial\Omega_i} = 0 (0 \leqslant i \leqslant p)$.由定理 4.7.1 知 $\Phi = 0$.

(2) 设 $\mathbf{v} \in H$,用 $\tilde{\mathbf{v}}$ 表示它在 $\Omega$ 外为零的延拓,从而在 $R^3$ 中有 $\text{div}\tilde{\mathbf{v}} = 0$.又因 $\text{supp}\tilde{\mathbf{v}}$ 是紧的,故由定理 4.7.5 知,存在 $\Psi$

$\in H^1(R^3)^3$，使得在 $R^3$ 中，$\tilde{v} = \text{curl}\Psi, \text{div}\Psi = 0$.

首先，在 $R^3\setminus\bar{\Omega}$ 中，有 $\text{curl}\Psi = 0$. 又设 $O$ 是包含 $\bar{\Omega}$ 的开球，用 $\Omega_i$ 表示由 $\partial\Omega_i$ 所围成的 $O\setminus\bar{\Omega}$ 的部分. 因为 $\Omega$ 是单连通的，每一个 $\Omega_i$ 也是单联通的，故由定理 4.6.9 知，存在 $q_i \in H^1(\Omega_i)$，使得

$$\text{在}\Omega_i\text{中}, \Psi = \text{grad}q_i (0 \leqslant i \leqslant p) \tag{4.7.33}$$

又因 $\Psi \in H^1(O)^3$，有 $q_i \in H^2(\Omega_i)$. 其次设 $x \in H^1(\Omega)$ 是非齐次 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \triangle x = 0 & \text{在}\Omega\text{中} \\ x|_{\partial\Omega_i} = q_i & 0 \leqslant i \leqslant p \end{cases} \tag{4.7.34}$$

的解，并记 $q = (q_0, \cdots, q_p)$. 显然，映照 $q \to x$ 属于 $L(\prod_{i=0}^{p} H^2(\Omega_i), H^1(\Omega))$ 以及集合 $\{x, q_0, q_1, \cdots, q_p\}$ 是 $x$ 在 $H^1(O)$ 中的延拓. 最后，取 $w = \text{grad}x$，在 $\Omega$ 中，$\text{div}w = 0, \text{curl}w = 0$；在 $\partial\Omega_i$ 上，$w \times n = \text{grad}x \times n = \text{grad}q_i \times n = \Psi \times n (0 \leqslant i \leqslant p)$. 从而 $\Psi - w$ 满足 (4.7.26) 以及 (4.7.32) 中第一个条件.

显然，$w$ 不是唯一的. 因为 (4.7.33) 在相差任意一个可加常数下确定一个 $q_i$. 以下证明可以选择 $p+1$ 个常数使得 $<(\Psi - w)\cdot n, 1>_{\partial\Omega_i} = 0 (0 \leqslant i \leqslant p)$. 为此，设 $q$ 是 (4.7.33) 的解中任意固定的一个，而 $\triangle^{-1}(q)$ 表示 (4.7.34) 相应的解. $\forall c \in R^{p+1}$，记 $\chi(c) = \triangle^{-1}(q) + \triangle^{-1}(c)$ 以及 $w(c) = \text{grad}\chi(c) = \text{grad}\triangle^{-1}(q) + \text{grad}\triangle^{-1}(c)$. 下面考察 $\text{grad}\triangle^{-1}(c)$ 的性质. 首先集合 $E = \{\text{grad}\triangle^{-1}(c): c \in R^{p+1}\}$ 是空间

$$G = \{v \in L^2(\Omega)^n: \text{div}v = 0, \text{curl}v = 0, v \times n|_{\partial\Omega} = 0\}$$

的 $p$ 维子空间，因为 $\triangle^{-1}$ 是一个同构且 Ker(grad) 是一维的，又对零散度向量 $v$，有 $<v\cdot n, 1>_{\partial\Omega_0} = -\sum_{i=1}^{p} <v\cdot n, 1>_{\partial\Omega_i}$. 因此如果证明了映射 $v \to (<v\cdot n, 1>_{\partial\Omega_i})(1 \leqslant i \leqslant p)$ 是由 $E$ 到 $R^p$ 上的内射，根据 $E$ 和 $R^p$ 有相同维数，则这个映射也是满的. 由证

明 (1) 知这个映射是内射，因此存在 $c\in R^{p+1}$ 使得 $< w(c)\cdot n, 1 >_{\partial\Omega_i} = < \Psi\cdot n, 1 >_{\partial\Omega_i}$ $(0\leqslant i\leqslant p)$，而且 $\Phi = \Psi - w(c)$ 满足 (4.7.26),(4.7.32) 以及 (4.7.33).

最后证明(4.7.33)最多有一个解.当 $v=0$ 时,有 $\mathrm{curl}\Phi\in \mathrm{Ker(curl)}$以及 $\mathrm{curl}\Phi\in H$.根据定理 4.6.12 和推论 4.6.8 有 $\mathrm{curl}\Phi=0$.由定理 4.7.5 知 $\Phi=0$.

(3) 因为 $q_i\in H^2(\Omega_i)$,由正则性理论知,只要 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,1}$ 类或 $\Omega$ 是凸多面体区域,由(4.7.34)求得的 $\chi\in H^2(\Omega)$.从而 $w\in H^1(\Omega)^3$,$\Phi\in H^1(\Omega)^3$.证毕.

与二维情况一样,由定理 4.7.7 可得 $L^2(\Omega)^3$ 和 $H_0^1(\Omega)^3$ 的分解.

**推论 4.7.4** $\forall v\in L^2(\Omega)^3$,存在正交分解

$$v=\mathrm{grad}q+\mathrm{curl}\Phi \tag{4.7.35}$$

这里 $q\in H^1(\Omega)/R$ 是 (4.7.9) 的解，$\Phi\in H^1(\Omega)^3$ 满足 $\mathrm{curl}\Phi\in H$.$\mathrm{div}\Phi=0$. 此外，如果 $\Omega$ 是单连通的，那么在 $H(\mathrm{curl},\Omega)$ 中可以选取 (4.7.33) 的唯一解.

如记

$$W=H(\mathrm{div},\Omega)\cap H_0(\mathrm{curl},\Omega),W_0=\{w\in W:\mathrm{div}w=0\}.$$

下面讨论 $W\to H^1(\Omega)^3$ 的嵌入定理.

**引理 4.7.3** 设 $\Omega$ 有界,且是凸多面体或 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,1}$ 类,则 $W$ 嵌入 $H^1(\Omega)^3$ 的充要条件是 $W_0$ 嵌入 $H^1(\Omega)^3$.

**证** 设 $\Phi\in W$,$q\in H^1(\Omega)$是 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\triangle q=div\Phi & \text{在}\Omega\text{中}\\ q=0 & \text{在}\partial\Omega\text{上}\end{cases}$$

的解,则 $\|\mathrm{grad}\, q-\Phi\|_{0,\Omega}\leqslant\|\Phi\|_{0,\Omega}$.又由对 $\Omega$ 的假设知,$q\in H^2(\Omega)$ 且 $\|q\|_{2,\Omega}\leqslant c_1\|\mathrm{div}\Phi\|_{0,\Omega}$.而在 $\partial\Omega$ 上,有$(\mathrm{grad}\, q)\times n=0$,从而 $\Psi=\Phi-\mathrm{grad}\, q\in W_0$.因此如果 $W_0$ 嵌入 $H^1(\Omega)^3$ 则 $\Phi\in H^1(\Omega)^3$ 且

$$\|\Phi\|_{1,\Omega} \leqslant \|\Psi\|_{1,\Omega} + c_1\|\mathrm{div}\Phi\|_{o,\Omega}$$
$$\leqslant c_2(\|\Psi\|_{o,\Omega} + \|\mathrm{curl}\Psi\|_{o,\Omega}) + c_1\|\mathrm{div}\Phi\|_{o,\Omega}$$
$$\leqslant c_2(\|\Phi\|_{o,\Omega} + \|\mathrm{curl}\Phi\|_{o,\Omega}) + c_1\|\mathrm{div}\Phi\|_{o,\Omega}$$

由此知嵌入是连续的,反之显然.证毕.

**引理 4.7.4** 设 $\Omega$ 是 L 型且单连通的,$\partial\Omega$ 只有一个分量($p=0$),则映射 $\Phi\to\mathrm{curl}\Phi$ 是由 $W_0$ 到 H 上的同构,而且存在两个常数 $c_i>0(i=1,2)$,使得

$$\|\Phi\|_{o,\Omega} \leqslant c_1\|\mathrm{curl}\Phi\|_{o,\Omega} \quad \forall \Phi\in W_o \tag{4.7.36}$$

$$\|\Phi\|_{o,\Omega} \leqslant c_2\{\|\mathrm{curl}\Phi\|_{o,\Omega} + \|\mathrm{div}\Phi\|_{o,\Omega}\} \quad \forall \Phi\in \mathrm{W} \tag{4.7.37}$$

**证** 因为 $\Omega$ 是单连通且 $p=0$,由定理 4.7.7 知 $\forall u\in H$,有唯一的向量位势 $\Phi\in W_0$,使得 $u=\mathrm{curl}\Phi$,因此 curl 是由 $W_0$ 到 H 上的一对一,线性连续的,又因 $W_0$ 和 H 是 Banach 空间,因此 curl是一个同构.而且映射 $\Phi\to\|u\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}=\|\mathrm{curl}\Phi\|_{o,\Omega}$ 是 $W_0$ 上的范数,它与 W 上的范数等价.由此得(4.7.36).

(4.7.37)是(4.7.36)和引理 4.7.3 的简单推论.$\forall\Phi\in W$,有 $\Phi=\Psi+\mathrm{grad}\, q$.这里 $\Psi\in W_0$.又由 Poincare−Friedrichs 不等式 $|q|_{1,\Omega}\leqslant c\|\mathrm{div}\Phi\|_{o,\Omega}$,有 $\|\Phi\|_{o,\Omega}\leqslant c_1\|\mathrm{curl}\Psi\|_{o,\Omega}+c\|\mathrm{div}\Phi\|_{o,\Omega}$.又 $\mathrm{curl}\Psi=\mathrm{curl}\Phi$,就得到所要的结论.证毕.

**定理 4.7.8** 在引理 4.7.3 假设下,W 嵌入 $H^1(\Omega)^3$.

**证**: 先设 $\Omega$ 是单连通的,且 $p=0$,由引理 4.7.3 知,这就是要证明 $W_0$ 嵌入 $H^1(\Omega)^3$,由引理 4.7.4 知 curl 是由 $W_0$ 到 H 上的同构,但是因为它也满足定理 4.7.7 中(3),所以 curl 也是由 $W_0\cap H^1(\Omega)^3$ 到 H 上的同构,因此,$W_0=W_0\cap H^1(\Omega)^3$ 以及 $W_0$ 嵌入 $H^1(\Omega)^3$.

当 $\Omega$ 是任意的时,由 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,1}$ 类的假设,可以找到$\bar{\Omega}$ 的有限个开覆盖 $\{O_i\}(1\leqslant i\leqslant l)$,使得每个 $O_i\cap\Omega$ 是单连通的,并具有连通的边界.设 $\{\alpha_i\}$ 是从属于 $\{O_i\}$ 的单位分解,则 $\forall\Phi\in W$,在 $\Omega$ 中有 $\Phi=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\Phi$.因此只须考虑 $\alpha_i\Phi$ 的正则性.因为 $\partial\Omega$

是 $C^{1,1}$ 类，$\alpha_i \in D(O_i)$，可以设 $\alpha_i \Phi$ 是定义在 $O_i \cap \Omega$ 的一个子集上，不妨记为 $O'_i$。它具有光滑边界，且和 $O_i \cap \Omega$ 有同样的性质。在 $\partial O'_i$ 上，$\partial_i(\Phi \times n) = 0$，因为在 $\partial O'_i$ 的每一点上，任何一个因子都为 0. 从而在 $O'_i$ 上有 $\alpha_i \Phi \in W$. 前面已经证明 $\alpha_i \Phi \in H^1(O'_i)^3$ 且

$$\|\alpha_i \Phi\|_1 \leqslant c_i \{\|\alpha_i \Phi\|_0 + \|\operatorname{div}(\alpha_i \Phi)\|_0 + \|\operatorname{curl}(\alpha_i \Phi)\|_0\}$$

这里范数都是在 $O'_i$ 上取的，从而有在 $O'_i$ 上

$$\|\alpha_i \Phi\|_1 \leqslant c'_i \{\|\Phi\|_0 + \|\operatorname{div}\Phi\|_0 + \|\operatorname{curl}\Phi\|_0\}$$

证毕.

记

$$U = H_0(\operatorname{div}, \Omega) \cap H(\operatorname{curl}, \Omega), \quad U_0 = \{u \in U : \operatorname{div} u = 0\}$$

和引理 4.7.3、引理 4.7.4 类似，有.

**引理 4.7.5** $U$ 嵌入 $H^1(\Omega)^3$ 的充要条件是 $U_0$ 嵌入 $H^1(\Omega)^3$.

**引理 4.7.6** 设 $\Omega \subset R^3$ 是 L 型且单连通的，则映射 $\Phi \to \operatorname{curl}\Phi$ 是由 $U_0$ 到 $T$ 上的同构，其中

$$T = \{u \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{div} u = 0, \langle u \cdot n, 1 \rangle_{\partial\Omega_i} = 0, 0 \leqslant i \leqslant p\}$$

同时，存在常数 $c_i > 0 (i = 1,2)$，使得 $\forall \Phi \in U_0$ 有

$$\|\Phi\|_{0,\Omega} \leqslant c_1 \|\operatorname{curl}\Phi\|_{0,\Omega} \tag{4.7.38}$$

$$\|\Phi\|_{0,\Omega} \leqslant c_2 \{\|\operatorname{curl}\Phi\|_{0,\Omega} + \|\operatorname{div}\Phi\|_{0,\Omega}\} \tag{4.7.39}$$

**证** 因为 $\Omega$ 是单连通的，则由定理 4.7.6 和引理 4.7.4 的证明有 $\Phi \to \operatorname{curl}\Phi$ 是由 $U_0$ 到 $T$ 上的同构而且(4.7.38)成立. 由(4.7.38)，(4.7.35)的直交分解以及商空间等价范数的性质可以立刻得到(4.7.39). 证毕.

**引理 4.7.7** 如果 $U$ 嵌入 $H^1(\Omega)^3$，那么 $\forall \Psi \in H^1(\Omega)^3$ 且 $\int_{\partial\Omega} \Psi \cdot n ds = 0$. 非齐次 Neumann 问题

$$\begin{cases} \triangle \chi = 0 & \text{在}\Omega\text{中} \\ \partial\chi / \partial n = \Psi \cdot n & \text{在}\partial\Omega\text{上} \end{cases} \tag{4.7.40}$$

的解 $\chi\in H^2(\Omega)/R$. 如果 $\Omega$ 是单连通的，那么对于 U 嵌入 $H^1(\Omega)^3$,这个条件是充分的.

**证** 设 $\Psi\in H^1(\Omega)^3$ 且 $\int_{\partial\Omega}\Psi\cdot n ds=0$, 则问题 (4.7.40) 有唯一解 $\chi\in H^1(\Omega)/R$ 且 $\Phi=\Psi-\mathrm{grad}\chi\in U$. 所以如果 $\Phi\in H^1(\Omega)^3$, 那么 $\chi\in H^2(\Omega)/R$.

又由定理 4.7.6 的证明知，如果 $\chi\in H^2/R$, 那么 T 的每个函数有唯一的向量位势，它属于 $U_0\cap H^1(\Omega)^3$, 根据引理 4.7.5,4.7.6, 有 U 嵌入 $H^1(\Omega)^3$. 证毕.

当 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,1}$ 类时，(4.7.40) 的解 $\chi\in H^2(\Omega)/R$, 则由定理 4.7.7 得出 U 嵌入 $H^1(\Omega)^3$, 只要 $\Omega$ 是单连通的. 但是由定理 4.7.8 证明的第二部分可得

**定理 4.7.9** 如果 $\Omega$ 是有界的，且具有 $C^{1,1}$ 类边界，那么 U 嵌入 $H^1(\Omega)^3$.

当 $\partial\Omega$ 是多面体，$\Psi\in H^1(\Omega)^3$ 时，$\Psi\cdot n\notin H^{1/2}(\partial\Omega)$. 这时考察 U 的嵌入性质.

**引理 4.7.8** 设 $\Omega$ 是 $R^3$ 中具有 $C^2$ 边界 $\partial\Omega$ 的有界开集，那么 $\forall\Phi\in H^1(\Omega)^3,\Phi\cdot n|_{\partial\Omega}=0$ 必满足

$$|\Phi|_{1,\Omega}^2+\int_{\partial\Omega}(R\Phi,\Phi)ds=\|\mathrm{curl}\Phi\|_{0,\Omega}^2+\|\mathrm{div}\Phi\|_{0,\Omega}^2 \qquad (4.7.41)$$

这里 R 是 $\partial\Omega$ 切平面上的曲率张量.

当 $\Omega$ 是凸的时,曲率张量 R 是正定的,因此有

**推论 4.7.5** 设 $\Omega$ 是 $R^3$ 中有 $C^2$ 边界 $\partial\Omega$ 的有界凸开集，那么 $\forall\Phi\in U\cap H^1(\Omega)^3$, 有

$$|\Phi|_{1,\Omega}^2\leqslant\|\mathrm{curl}\Phi\|_{0,\Omega}^2+\|\mathrm{div}\Phi\|_{0,\Omega}^2 \qquad (4.7.42)$$

**定理 4.7.10** 设 $\Omega$ 是有界凸多面体，那么空间 U 连续嵌入 $H^1(\Omega)^3$, 并且 U 中的函数满足 (4.7.42).

**证** 构造一个递增的开凸集序列 $\{\Omega_l\}(l\geqslant 1)$,$\partial\Omega_l$ 是 $C^2$ 类

的，使得$\overline{\Omega}_l \subset \Omega (l \geqslant 1)$且$\Omega = \bigcup_{l \geqslant 1} \Omega_l$，由引理 4.7.5，只须考虑空间$U_0$. 设$\forall \Phi \in U_0, \chi_l \in H^1(\Omega_l)/R$是边值问题

$$\begin{cases} \triangle \chi_l = 0 & 在\Omega_l中 \\ \partial \chi_l / \partial n = \Phi \cdot n & 在\partial\Omega_l上 \end{cases} \tag{4.7.43}$$

的解．在$\Omega_l$上定义$\Phi_l = \Phi - \mathrm{grad}\chi_l$，由于$\mathrm{div}\Phi = 0$，非齐次 Neumann 问题(4.7.43)有唯一解$\chi_l$，又由推论 4.6.10，$\Phi \in H^1(\Omega_l)^3 (l \geqslant 1)$. 因为$\partial\Omega_l$是光滑的，有$\Phi \cdot n \in H^{1/2}(\partial\Omega_l)$，从而$\chi_l \in H^2(\Omega_l)/R, \Phi_l \in H^1(\Omega_l)^3$且在$\partial\Omega_l$上，$\Phi_l \cdot n = 0$. 故由引理 4.7.8，有

$$|\Phi_l|_{1,\Omega_l} \leqslant \|\mathrm{curl}\Phi_l\|_{0,\Omega_l} \leqslant \|\mathrm{curl}\Phi\|_{0,\Omega} (l \leqslant 1) \tag{4.7.44}$$

注意边值问题(4.7.43)等价于

$$\int_{\Omega_l} \Phi_l \cdot \mathrm{grad}\mu dx = 0, \qquad \forall \mu \in H^1(\Omega_l)$$

则有

$$\|\Phi_l\|_{0,\Omega_l} \leqslant \|\Phi\|_{0,\Omega} \tag{4.7.45}$$

$$\|\mathrm{grad}\chi_l\|_{0,\Omega_l} \leqslant \|\Phi\|_{0,\Omega} \tag{4.7.46}$$

$$\left|\int_{\Omega} \mathrm{grad}\chi_l \cdot \mathrm{grad}\mu dx\right| \leqslant \|\Phi\|_{0,\Omega\setminus\Omega_l} \|\mathrm{grad}\mu\|_{0,\Omega\setminus\Omega_l}$$
$$\forall \mu \in H^1(\Omega) \tag{4.7.47}$$

在$\Omega_l$外作$\mathrm{grad}\chi_l, \Phi_l$和$\partial\Phi_l/\partial x_i$的零延拓分别记为$\widetilde{\mathrm{grad}}\chi_l, \tilde{\Phi}_l$和$\partial\tilde{\Phi}_l/\partial x_i$. 由(4.7.42)有

$$在L^2(\Omega)^3中, \widetilde{\mathrm{grad}}\chi_l弱收敛于w, 且\mathrm{curl}w = 0.$$

实事上，如果$\Lambda \in D(\Omega)^3$，则存在整数$k > 0$，使得$\Lambda \in D(\Omega_l)^3 (\forall l \geqslant k)$，有

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \operatorname{curl}\Lambda dx = \lim_{l\to\infty} \int_{\Omega} \operatorname{grad}\chi_l \cdot \operatorname{curl}\Lambda dx$$

又由

$$\int_{\Omega_l} \operatorname{grad}\chi_l \cdot \operatorname{curl}\Lambda dx = 0 \quad \forall\, l \geqslant k$$

就得到的需结果.

因为 $\Omega$ 是单连通的，故有 $\chi \in H^1(\Omega)$，使得 $\mathbf{w} = \operatorname{grad}\chi$. 又由 (4.7.47) 知，$\operatorname{grad}\chi = 0$，且在 $L^2(\Omega)^3$ 中，$\tilde{\Phi}_l$ 弱收敛于 $\Phi$. 与 (4.7.44) 一起，有在 $L^2(\Omega)^3$ 中，

$$\partial\tilde{\Phi}_l / \partial x_i \text{弱收敛于} \partial\Phi / \partial x_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant 3)$$

故 $\Phi \in H^1(\Omega)^3$，又由(4.7.44)有

$$|\Phi|_{1,\Omega} \leqslant \|\operatorname{curl}\Phi\|_{0,\Omega}$$

证毕.

作为本定理和引理 4.7.7 的直接推论. 一方面，如果 $\Omega$ 是有界凸多面体时，则问题 (4.7.40) 的解 $\chi \in H^2(\Omega)$. 另一方面，如果 $\Omega$ 不是凸多面体时，则有问题 (4.7.40) 的解 $\chi \notin H^2(\Omega)$ 的情况，因此 $U \notin H^1(\Omega)^3$.

最后给出

**推论 4.7.6** 设 $\Omega \subset R^3$ 是有界开集，且 $\partial\Omega$ 是 $C^{m,1}(m \geqslant 1)$类的，则

$$H^m(\Omega)^3 = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \operatorname{div}\mathbf{v} \in H^{m-1}(\Omega), \operatorname{curl}\mathbf{v} \in H^{m-1}(\Omega)^3, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)\} \tag{4.7.48}$$

以及

$$\|\mathbf{v}\|_{m,\Omega} \leqslant c\{\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega} + \|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_{m-1,\Omega} + \|\operatorname{curl}\mathbf{v}\|_{m-1,\Omega} \\ + \|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\|_{m-1/2,\partial\Omega}\} \tag{4.7.49}$$

## § 4.8 Соболев空间 $L^p(0,T;X)$

为了研究发展方程,这节研究 Соболев 空间 $L^p(a,b;X)$.

设 V 和 H 是两个 Hilbert 空间,其范数分别为 $\|\cdot\|$ 和 $|\cdot|$,并且

$$V在H中稠密以及V嵌入H \tag{4.8.1}$$

设 $(\cdot,\cdot)$ 表示 H 的与 $|\cdot|$ 相对应的内积. V′是 V 的对偶空间,用 $\|\cdot\|_*$ 表示 V′的范数. 进一步,如果 $H=H'$, 则 H 可以与 V′的一个子空间等同,且

$$\begin{cases} V在H中稠密,V嵌入H; \\ H在V'中稠密,H嵌入V' \end{cases} \tag{4.8.2}$$

从而 V 和 V′之间的对偶对 $<\cdot,\cdot>$ 就是内积 $(\cdot,\cdot)$ 的延拓.

设 $T>0$ 是一个固定的实数,考察空间

$$\begin{aligned} W(0,T) &= W(0,T;V,V') \\ &= \{v\in L^2(0,T;V), \frac{dv}{dt}\in L^2(0,T;V')\} \end{aligned} \tag{4.8.3}$$

其范数为

$$\|v\|_{W(0,T)} = [\int_0^T (\|v(t)\|^2 + \|\frac{dv}{dt}\|_*^2)dt]^{1/2} \tag{4.8.4}$$

则 $W(0,T)$ 是 Hilbert 空间,它中的元素和 $C([0,T];V')$ 中的函数几乎处处相等. 事实上,为了证明 $v\in C([0,T];H)$, 先给出.

**定理 4.8.1** 空间 $C^\infty([0,T];V)$ 在 $W(0,T;V,V')$ 中稠密.

**证** 设 $\alpha$ 和 $\beta$ 是 $C^\infty([0,T])$ 中两个数值函数,满足

$$\begin{cases} 0\leqslant \alpha(t),\beta(t)\leqslant 1, 且在[0,T]上\alpha+\beta=1 \\ \operatorname{supp}\alpha\subset[0,2T/3], \quad \operatorname{supp}\beta\subset[T/3,T] \end{cases} \tag{4.8.5}$$

设 $u\in W(0,T)$, 由 (4.8.5), 有 $u=\alpha u+\beta u$, 从而只要在 $C^\infty([0,T];V)$ 中构造一个序列,它收敛于 $\alpha u$ 和 $\beta u$ 即可,记 $v$

$=\alpha u$，$\tilde{v}$ 是 $v$ 在 $[0,T]$ 外为零的延拓．因为在 $2T/3$ 外，$\alpha$ 为零，所以 $\tilde{v}\in W(0,\infty)$．对 $h>0$，考察函数 $v_h(t)=\tilde{v}(t+h)$，$\forall t>-h$．显然在 $W(0,\infty)$ 中，有 $\lim\limits_{h\to 0} v_h=\tilde{v}$．从而只须用 $C^\infty([0,T];V)$ 中的序列逼近 $v_h$ 即可．

设 $\omega\in D(\mathbb{R})$，$\omega\geqslant 0$，$\int_{\mathbb{R}}\omega(t)dt=1$．$\mathrm{supp}\,\omega\subset[-1,1]$．$\forall\varepsilon>0$．置 $\omega_\varepsilon(t)=\omega(t/\varepsilon)$，则 $\omega_\varepsilon\in D(\mathbb{R})$，且在 $D'(\mathbb{R})$ 中 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega_\varepsilon=\delta$．从而

$\omega_\varepsilon * v_h\in C^\infty([0,T];V)$，且在 $L^2(0,\infty;V)$ 中，有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\omega_\varepsilon * v_h)=v_h$；以

及在 $L^2(0,\infty;V')$ 中，有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{dt}(\omega_\varepsilon * v_h)=\frac{dv_h}{dt}$

因此，$\omega_\varepsilon * v_h$ 正是所要找的序列．证毕．

**定理 4.8.2** $W(0,T)$ 嵌入 $C([0,T];H)$，且 $\forall u,v\in W(0,T)$，下述 Green 公式成立

$$\int_0^T\{<\frac{du}{dt}(t),v(t)>+<u(t),\frac{dv}{dt}(t)>\}dt$$
$$=<u(T),v(T)>-<u(0),v(0)> \tag{4.8.6}$$

**证** 因为 $C^\infty([0,T];V)$ 在 $W(0,T)$ 中稠密，故只须证明 $\forall u\in C^\infty([0,T];V)$，有

$$\max_{t\in[0,T]}|u(t)|\leqslant c\|u\|_{W(0,T)} \tag{4.8.7}$$

事实上，如果(4.8.7)成立，由 $C^\infty([0,T];V)$ 到其自身的稠密映照可以连续地延拓为由 $W(0,T)$ 到 $C([0,T];H)$ 的线性连续映照．

设 $u\in C^\infty([0,T];V)$，考虑 $C^\infty([0,T])$ 中满足(4.8.5)的两个函数 $\alpha$，$\beta$．则可以记 $u=v+w$，其中 $v=\alpha u$，$w=\beta u$．
由恒等式

$$\frac{d}{dt}|v(t)|^2 = 2(v(t),\ \frac{d}{dt}v(t)) \quad \forall\, t\in[0,\ T]$$

得

$$|v(t)|^2 = -2\int_t^T (v(s),\ \frac{d}{ds}v(s))ds \leqslant 2\int_0^T \|v(s)\|\|\frac{d}{dt}v(s)\|_* \cdot ds$$

从而

$$|v(t)|^2 \leqslant \int_0^T \{\|v(s)\|^2 + \|\frac{d}{dt}v(s)\|_*^2\}ds$$

即

$$|v(t)| \leqslant \|v\|_{W(0,\ T)} \tag{4.8.8}$$

设$t\in[0,\ T/3)$，则$\alpha(t)=1$，又因$\alpha$非常光滑，由(4.8.8)得

$$|u(t)| \leqslant c\|u\|_{W(0,\ T)} \quad \forall\, t\in[0,\ T/3), \tag{4.8.9}$$

对 $w$ 用同样的讨论，在区间(2T／3 ，T]上也有(4.8.9)成立.最后，用其它适当的函数 $\alpha$，$\beta$，重复同样的过程，在整个区间[0，T]上,就有(4.8.9)式成立.

$\forall\, u$，$v\in C^\infty([0,\ T];V)$，(4.8.6)显然成立，又由定理 4.8.1 和前面的讨论,可知对$\forall\, u$，$v\in W(0,\ T)$，(4.8.6)也成立.证毕.

迄今为止，已讨论了涉及到整数阶导数的 Соболев 空间，但是分数阶导数的空间在实际中也有广泛地应用.它是通过§1.9 的 Fourier 变换引进的.即如在[0，T]上，$t\to u(t)$，且在[0,T]外作零延拓.

$$\tilde{u}(t)=\begin{cases} u(t) & \forall\, t\in[0,\ T] \\ 0 & \forall\, t\notin[0,\ T] \end{cases}$$

记它的Fourier变换$F\tilde{u}(\tau)$为$\hat{u}(\tau)$.

$\forall\, \gamma\in\mathbf{R}_+$，定义空间

$$F^{\gamma}(0, T;V, H)=\{u\in L^2(0, T;V):\tau\to|\tau|^{\gamma}\hat{u}(\tau)\in L^2(R;H)\}$$

其范数为

$$\|u\|_{F^{\gamma}}=\{\int_0^T\|u(t)\|^2dt+\int_{R}|\tau|^{2\gamma}|\hat{u}(\tau)|^2d\tau\}^{1/2}$$

则空间$F^{\gamma}$具有下述性质

**定理 4.8.3** 如果 V 紧嵌入 H，则 $F^{\gamma}(0, T;V, H)$紧嵌入 $L^2(0, T;H)$

证：设$\{u_m\}$是 $F^{\gamma}(0, T;V, H)$中有界集合，由定义,要在$\{u_m\}$中选出一子序列$\{u_{m'}\}$，使得它在 $L^2(0, T;H)$中收敛.

根据$\{u_m\}$的有界性知,存在 $u\in F^{\gamma}(0, T;V, H)$以及$\{u_m\}$的子序列$\{u_{m'}\}$,使得在 $F^{\gamma}(0, T;V, H)$中$\{u_{m'}\}$弱收敛于 $u$,不失一般性,设 $u=0$,则可以证明在 $L^2(R,H)$中,$\{u_{m'}\}$的 Fourier 变换$\{\hat{u}_{m'}\}$强收敛于零.为此,对于任意充分大的正数 M,有

$$\int_R|\hat{u}_{m'}|^2d\tau=\int_{|\tau|\leqslant M}|\hat{u}_{m'}(\tau)|^2d\tau+\int_{|\tau|\geqslant M}(1+|\tau|^{2\gamma})|\hat{u}_{m'}(\tau)|^2/(1+|\tau|^{2\gamma})d\tau$$

因为$\|u_m\|_{F^{\gamma}}$是有界的，有

$$\int_R|\hat{u}_{m'}|^2d\tau\leqslant\int_{|\tau|\leqslant M}|\hat{u}_{m'}(\tau)|^2d\tau+c_1/(1+M^{2\gamma})$$

从而因为$\lim\limits_{M\to\infty}1/(1+M^{2\gamma})=0$，下面只须证明

$$\lim_{m'\to\infty}\int_{|\tau|\leqslant M}|\hat{u}_{m'}(\tau)|^2d\tau=0,\ \forall M<\infty \tag{4.8.10}$$

对于 V 中的 $w$ 和每一个 $\tau$，注意到 $e^{-it\tau}w\in L^2(0, T;V)$，以及在 $L^2(0, T;H)$中 $u_{m'}$弱收敛于零，有

$$\lim_{m'\to\infty}(\hat{u}_{m'}(\tau),\ w)=\lim_{m'\to\infty}\int_0^T(u_{m'}(t),\ e^{-i t \tau}w)dt=0$$

但是，对每一个 $\tau$，$\hat{u}_{m'}(\tau)\in V$ 以及

$$\|\hat{u}_{m'}(\tau)\|_V\leqslant T^{1/2}\|\hat{u}_{m'}\|_{L^2(0,\ T;V)}\quad\leqslant c_2$$

因此对每一个 $\tau$，在 V 中 $\hat{u}_{m'}(\tau)$ 弱收敛于零，又因 V 紧嵌入 H，从而对每一个 $\tau$，$\hat{u}_{m'}(\tau)$ 在 H 中强收敛于零，即对每一个有限的 $M$，(4.8.10) 成立．证毕．

# 符号说明

**集　合**

| | |
|---|---|
| $\Omega$ | $R^n$中一开子集　§1.1 |
| $\forall x\in A$ | 表示对集合A中任意元素$x$　§1.1 |
| $G\subset\Omega$ | G是Ω的子集合　§1.1 |
| $\overline{G}$ | 集合G的闭包　§1.1 |
| $G\subset\subset\Omega$ | $\overline{G}\subset\Omega$且$\overline{G}$是$R^n$的紧子集　§1.1 |
| $A\times B$ | 集合的笛卡尔乘积 |
| $A+B$ | $\{x+y:\ x\in A,\ y\in B\}$　§1.7 |
| $A\setminus B$ | 集合B在集合A中的补集　§1.1 |
| $\partial\Omega$ | 集合的Ω边界　§1.1 |
| n | 集合Ω的边界∂Ω的单位法向量　§4.4，§4.5 |
| $\tau$ | 集合Ω的边界∂Ω的单位切向量　§4.4，§4.5 |
| | L型区域　§3.2 |
| | $C^k$型区域　§3.4 |

**标　量**

| | |
|---|---|
| K,R,C | 数域，实数域，复数域 |
| $K^n,R^n,C^n$ | $n$维数域，$n$维实数域，$n$维复数域　§1.1，§1.9 |
| $R^n_+$ | 上半空间　§3.5 |
| $\mathrm{Re}(z)$、$\mathrm{Im}(z)$ | 复数$z\in C$的实部和虚部　§1.9 |
| sup | 上确界 |
| inf | 下确界 |
| esssup,essinf | 本性极大，本性极小　§1.2 |

## 函　数

| | |
|---|---|
| $f: A \to B$ | $f$是由A到B的映射 |
| $R(f)$ | 映射$f$的值域 |
| $f(S)$ | 映射$f$作用集合S后所得的像 |
| $f^{-1}(T)$ | 映射$f$的逆作用集合T所得的像 |
| $\mathrm{supp}\ f$ | 映射$f$的支集　　§1.1 |
| $f\vert_G$ | 映射$f$在G上的限制 |
| $\bar{f}$ | 复映射$f$的共轭 |
| $\mathrm{Ker}(f)$ | 映射$f$的核 |
| $u,v,w,\varphi,\psi$ | 标量函数(映射)　　§1.2 |
| $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\Phi,\Psi$ | 向量值函数(映射)　　§4.6 |
| $T_f$ | 由$f$生成的广义函数T　　§1.4 |

## 线性空间

| | |
|---|---|
| $M \subset X$ | M是线性赋范空间X的子空间 |
| $X/M$ | 商空间　　§3.7 |
| $L(X,Y)$ | 由线性赋范空间X到线性赋范空间Y上的线性连续算子所组成的线性空间 |
| $X'$ | 赋范空间X的对偶空间　　§2.3 |
| $(x,y)$ 或 $(x,y)_H$ | 内积空间H中的内积 |
| $X = V_1 \oplus V_2$ | 线性赋范空间X是其子空间$V_1,V_2$的直接和 |
| $X \simeq Y$ | 赋范空间X和Y是等距同构　　§2.3 |
| $\prod_{i=1}^{r} X_i$ | 线性赋范空间$X_i(1 \leqslant i \leqslant r)$组成的笛卡尔乘积空间　　§3.1，§4.5 |

| | |
|---|---|
| $X^n$ | $X\times\cdots\times X$(n个X的乘积空间)　§4.6 |
| $Z_+^n$ | n重非负整数空间　§1.1 |

函数空间

| | |
|---|---|
| $C(\Omega)=C^0(\Omega)$ | Ω上连续函数的全体　§1.2 |
| $C^m(\Omega)$ $(0\leqslant m\leqslant\infty)$ | 函数及其直到m阶偏导数在Ω上连续的函数全体　§1.2 |
| $C^m(\overline{\Omega})$ | 函数及其直到m阶偏导数在Ω上有界且一致连续的函数全体　§1.2 |
| $C_B^m(\Omega)$ | 函数及其直到m阶偏导数在Ω上有界且连续的函数全体　§1.2 |
| $C^{m,\lambda}(\Omega)$ | $C^m(\overline{\Omega})$中其偏导数$\partial^\alpha f$，$0\leqslant\|\alpha\|\leqslant m$，在Ω中满足指数为$\lambda$的Hoclder条件的函数全体 |
| $C^m(I;\ V)$ | 区间$I\subset R$到V上的m次连续可微抽象函数的全体　§4.3 |
| $C_0(\Omega)$ | 其紧支集为Ω的子集合的连续函数的全体　§1.8 |
| $C_0^\infty(\Omega)$ | Ω上无穷次连续可微且其紧支集为Ω的子集合的函数全体　§1.2 |
| $C_0^\infty(R^n,\Omega)$ | $C_0^\infty(R^n)$中的函数在Ω上的限制的全体　§1.2 |
| $C_K^\infty(\Omega)$ | $C_0^\infty(\Omega)$中满足supp $f\subset K\subset\Omega$的函数的全体　§1.3 |

| | |
|---|---|
| $\mathbf{D}(\Omega)$ | 空间$\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$赋予相应的拓扑后所得到的局部凸拓扑向量空间　§1.3 |
| $\mathbf{D}'(\Omega)$ | $\mathbf{D}(\Omega)$的拓扑对偶空间　§1.4 |
| $\mathbf{E}(\Omega)$ | $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$赋予相应的拓扑后所得到的局部凸拓扑向量空间　§1.4 |
| $\mathbf{E}'(\Omega)$ | $\mathbf{E}(\Omega)$的拓扑对偶空间　§1.4 |
| $\mathbf{F}^\gamma(I;\ \mathbf{V},\mathbf{H})$ | $\{u\in\mathbf{L}^2(I;\ \mathbf{V}):\quad \tau\to\lvert\tau\rvert^\gamma\hat{u}(\tau)\in \mathbf{L}^2(\mathbf{R};\ \mathbf{H})\}\ I\subset\mathbf{R}$　§4.7 |
| $\mathbf{H}^{m,p}(\Omega)$ | $\{u\in\mathbf{C}^m(\Omega):\ \lVert u\rVert_{m,p,\Omega}<\infty\}$关于范数$\lVert\cdot\rVert_{m,p,\Omega}$的完备化所得的空间　§3.1 |
| $\mathbf{H}_0^{m,p}(\Omega)$ | 见$\mathbf{W}_0^{m,p}(\Omega)$ |
| $\mathbf{H}^{-m,p'}(\Omega)$ | $\mathbf{H}_0^{m,p}(\Omega)$的对偶空间，其中$1/p+1/p'=1$　§3.3 |
| $\mathbf{H}^s(\mathbf{R}^n)(s\in\mathbf{R})$ | $\mathbf{R}^n$上实数阶Соболев空间　§4.1 |
| $\mathbf{H}^s(\Omega)\quad(s\in\mathbf{R})$ | $\Omega$上实数阶Соболев空间　§4.5 |
| $\mathbf{H}^s(\partial\Omega)\quad(s\in\mathbf{R})$ | 迹空间　§3.5，§4.5 |
| $\mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega)$ | $\{v\in\mathbf{L}^2(\Omega)^n:\ \mathrm{div}\ v\in\mathbf{L}^2(\Omega)\}$　§4.6 |
| $\mathbf{H}_0(\mathrm{div},\Omega)$ | $\mathbf{D}(\Omega)^n$在空间$\mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega)$中的闭包　§4.6 |
| $\mathbf{H}(\mathrm{curl},\Omega)$ | $\{v\in\mathbf{L}^2(\Omega)^n:\ \mathrm{curl}\ v\in\mathbf{L}^2(\Omega)^n\}$　§4.6 |
| $\mathbf{H}_0(\mathrm{curl},\Omega)$ | $\mathbf{D}(\Omega)^n$在空间$\mathbf{H}(\mathrm{curl},\Omega)$中的闭包　§4.6 |
| $\mathbf{L}^1_{loc}(\Omega)$ | $\Omega$上局部可积函数的全体　§1.4 |
| $\mathbf{L}^1_k(\Omega)$ | 紧支集在$k\subset\Omega$内可积函数全体　§1.6 |

| | |
|---|---|
| $L^p(\Omega)$ | 满足$\int_\Omega \|u\|^p dx < \infty$的可测函数全体 |
| $1 \leqslant p < \infty$ | § 1.2，§ 2.1 |
| $L^\infty(\Omega)$ | $\Omega$中本性有界可测函数全体　§ 1.2 |
| $L^2_0(\Omega)$ | $\left\{u \in L^2(\Omega): \int_\Omega u dx = 0\right\}$　§ 4.6 |
| $L^p(I; X)$ | 由区间$I \subset R$到赋范空间$X$上且 $\\|\cdot\\|_X \in L^p(I)$的抽象函数的全体 § 4.3 |
| $\tilde{S}(R^n)$ | $C^\infty(R^n)$中在无穷远处急降函数全体 § 1.3 |
| $S(R^n)$ | 空间$\tilde{S}(R)$赋予相应的拓扑后所得到的局部凸拓扑向量空间　§ 1.3 |
| $S'(R^n)$ | $S(R^n)$的拓扑对偶空间　§ 1.4 |
| $V$ | $\{v \in H^1_0(\Omega)^n: \operatorname{div} v = 0\}$　§ 4.6 |
| $V_0$ | $\{v \in D(\Omega)^n: \operatorname{div} v = 0\}$　§ 4.6 |
| $V^0$ | $\{f \in H_0^{-1}(\Omega)^n: < f, v > = 0, \forall v \in V\}$ § 4.6 |
| $W^{m,p}(\Omega)$ | $\{u \in L^p(\Omega): \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leqslant \|\alpha\| \leqslant m$, 其中 $\partial^\alpha u$ 是 $\alpha$ 阶弱导数$\}$　§ 3.1 |
| $W^{m,p}_0(\Omega)$ | $C^\infty_0(\Omega)$ 在范数 $\\|\cdot\\|_{m,p,\Omega}$ 下的闭包 § 3.1 |
| $W^{-m,p'}(\Omega)$ | $W^{m,p}_0(\Omega)$的对偶空间，其中 $1/p+1/p'=1$　§ 3.3 |

## 算 子

$\rho \circ \gamma$ 或 $\rho . \gamma$ 算子的复合 § 3.5，§ 4.1

$\partial^{\alpha}\ (\alpha \in \mathbb{Z}^n_+)$ α阶偏导数 § 1.1

$\partial_j\ (1 \leqslant j \leqslant n)$ 对 $x_j$ 的偏导数

$\frac{\partial f}{\partial n}, \frac{\partial f}{\partial \nu}$ 法向导数 § 1.5，§ 4.6

$\nabla$ , grad 梯度算子 § 4.6

$\nabla \times$ , curl 旋度算子 § 4.6

$\nabla \cdot$ , div 散度算子 § 4.6

$\triangle$ Laplace算子

$J_{\varepsilon}(f)$ $f$ 的磨光算子 § 1.8

$\delta$，$\delta_n$ Dirac泛函 § 1.3

$\gamma$，$\gamma_n$ 迹算子 § 3.5，§ 4.6

$\gamma_{\tau}$ § 4.6

$\gamma_j\ (0 \leqslant j)$ $j$ 阶迹算子 § 3.5

# 参考文献

〔1〕 李立康、郭毓驹: 索伯列夫空间引论，上海科学技术出版社(1981)

〔2〕 R.A.Adams: Sobolev Spaces, New York, Academic press (1975)(有中译本)

〔3〕 S.Agmon: Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, princeton, N.T., Van Nostrand (1965)

〔4〕 I.Babuska & A.K.Aziz: Survey lectures on the Mathematical Fundament of the Finite Element Method, New York (1972)

〔5〕 Barros–Neto: An Introduction to the Theory of Distributions, Marcel Dekker, Inc.New York (1973)

〔6〕 Ju.,M.,Berezanskii: Expansions in Eigenfunction of Self–Adjoint Operators, Translations of Mathematical Monographs, Vol.17. American Mathematical Society, Providence, R.I., (1968)

〔7〕 P.G.Ciarlet: The Finite Element Method for Elliptic Problems, North–Holland Publishing Company (1978)

〔8〕 J.Chazarain & A.Prion: Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equation

〔9〕 A.Friedman: Partial Differential Equations of Parabolic Type, Printice–Hill (1964)

〔10〕: V.Giranlt & P.A.Raviart: Finite Element Approximation of the Navier–Stokes Equations, Springer–Verlag (1985)

〔11〕 L.Hörmander: Linear Patial Differential Operators, Springer–Verlag (1963)

〔12〕 J.L.Lions & E.Magenes: Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Springer-Verlag, (1972)

〔13〕 J.L.Lions: Problemes Aux Limites Dans Les Equations Aux Derivees Partielles (1967)(有中译本)

〔14〕 V.G.Mazja: Sobolev Spaces, Springer-Verlay (1985)

〔15〕 J, T.Oden & J.N.Reddy: An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements, John wiley & Sons (1976)

〔16〕 A.Pazy: Semigroups of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations, New York, Springer (1983)

〔17〕 R.E.Showalter: Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations, Pitman Publishing (1977)

〔18〕 F.Tre′ves: Basic Linear Patial Differential Equations, Academic Press (1975)

〔19〕 K.Yosida: Functional Analysis, 4th ed. Springer-Verlag (1974)

〔20〕 О.А.Ладеженская и Н.Н.Уралцева: Краеват задача длт линейных и квазилинейных п арабол ических уравнений I.Изь.Акал.Наук. ССС Р-Серит Мам. 26(1962)

〔21〕 С.Л.Соболев: Некоторые применения функционального анализа в математической физи ке.Изд.Ленен.унив(1950)

[General Information]
书名=研究生教材　数理方程HILBERT空间方法（上）广义函数和СОБОЛЕВ空间
作者=李开泰　马逸尘
页数=249
SS号=10199935
DX号=
出版日期=1990年10月第1版
出版社=西安交通大学出版社

封面
书名
版权
前言
目录